This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3628.94

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1848.)

8 Nov. 1894.

Adolph Kleyer. Encyklopädie der gesamten math., techn., und exakten natur-wissenschaften.

Einführung

in die

Funktionentheorie.

Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern

der

Differential- und Integralrechnung.

Mit 23 in den Text gedruckten Figuren.

Bearbeitet

von

Dr. W. Láska.

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1894.

3628.94
Math 3608.94

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

Vorwort.

An einem Werke, welches leichtfasslich die ersten Principien der Funktionentheorie geben würde, fehlt es noch. Das Werk von Durège behandelt ausschliesslich die Riemannsche Theorie. Ich habe mich daher entschlossen, die nachstehend zusammengestellten Themen zu veröffentlichen. Sie geben nur die charakteristischen Züge der neueren Funktionentheorie wieder und sollen Vorstudien sein zu Weierstrass Abhandlungen aus der Funktionentheorie, sowie zu dem bekannten Werke von Biermann. Oft findet man die Beweise mehr angedeutet als ausgeführt, was einer zur Orientierung bestimmten Ausführung wohl nur zum Nutzen gereichen wird. Dafür war ich bestrebt, durch zahlreiche Beispiele das Verständnis zu erleichtern.

Prag, im September 1893.

Dr. W. Láska.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
§ 1.	Grundbegriffe	1
§ 2.	Die geschichtliche Entwicklung des Funktionsbegriffes	10
§ 3.	Riemann-Cauchys Funktionentheorie	14
§ 4.	Theorie der komplexen Integrale	22
§ 5.	Fortsetzung der Funktionentheorie nach Riemanns Anschauung	30
§ 6.	Rationale Funktionen	33
§ 7.	Theorie der Reihen	36
§ 8.	Die Reihenfortsetzung	45
§ 9.	Begriff der Funktion nach Weierstrass. Die Differentiation	50
§ 10.	Darstellung der eindeutigen Funktionen	53

1306. Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Einführung in die Funktionentheorie.
Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.
Seite 1—16. Mit 4 Figuren.

Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; **der Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Einführung in die Funktionentheorie.

Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.

Bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Seite 1—16. Mit 4 Figuren.

Inhalt:

Grundbegriffe. — Die geschichtliche Entwicklung des Funktionsbegriffes. — Riemann-Cauchys Funktionentheorie.

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

☞ **Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.**

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer**, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Einführung in die Funktionentheorie.

§ 1. Grundbegriffe.

In der Funktionentheorie wird oft von der Stetigkeit gesprochen. Geometrisch sich eine stetige Grösse vorzustellen unterliegt keiner Schwierigkeit. Analytisch erfordert die Stetigkeit eines Beweises, dass wir imstande sind, die Aufeinanderfolge zweier Zahlen so darzustellen, dass der Begriff der Lücke nicht anwendbar wird. Werden wir uns eines Gegenstandes mehrmals bewusst, so drücken wir dies aus durch ein bestimmtes Zeichen, welches wir die benannte Zahl nennen. Abstrahieren wir von der Individualität der Vorstellung, so gelangen wir zu dem Begriffe der reinen Zahl. So abstrahieren wir den Begriffen fünf Bäume, fünf Häuser etc. den Begriff fünf. Es gibt aber Vorstellungen, die von der qualitativen Individualität frei sind, bei welchen also nur quantitative Beziehungen hervortreten. Z. B. die Vorstellung von zwei ungleich langen Strecken. Diesen Vorstellungen abstrahieren wir den Begriff des Verhältnisses. Wie klein wir auch die Einheit der reinen Zahl nehmen mögen, immer gelangen wir zu einer diskreten Menge: Wir zeigen nachstehend, dass die Aufeinanderfolge der Rationalzahlen Lücken hat. Diese werden durch Zahlen ausgefüllt, die dem Begriffe des Verhältnisses nachgebildet sind, durch die irrationalen Zahlen. Stellen wir uns zwei ungleiche Strecken vor. Lässt man die eine unbegrenzt wachsen, während die andere sich gleich bleibt, so durchläuft ihr Verhältnis eine stetige Reihe von Vorstellungen. Bezeichnen wir die Quantität einer jeden Einzelvorstellung mit einem Zeichen, so gelangen wir in den Besitz einer kontinuierlichen Zeichenreihe.

Der erste, der sich mit den irrationalen Zahlen eingehend beschäftigte, war Bolzano; derselbe gab 1817 die erste wissenschaftliche Definition dieses Begriffes. Seine Theorie wurde später selbständig durch Cantor (Math. Ann., B. V. Acta Math. B. II, vergleiche auch Heine Crelle Journal 74) erfunden und erweitert. Die irrationale Zahl wird hier als Grenzwert der Rationalen betrachtet. Schwieriger ist die von Weierstrass entwickelte Theorie (vergl. Math. Ann., B. 21). Neben Cantor und Weierstrass hat Dedekind in seiner Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ eine Theorie der irrationalen Zahlen entwickelt, die auf einfachen Principien beruht.

Wir geben im nachstehenden die Grundzüge der Dedekindschen Theorie wieder:

Lehrsatz 1. Haben wir zwei noch so nahe liegende Brüche, so können wir immer noch einen dritten einschalten.

Beweis. Seien:

$$\frac{\alpha}{\beta} \text{ und } \frac{\alpha'}{\beta'}$$

die gegebenen Brüche. Bringen wir sie auf gemeinschaftlichen Nenner, so wird:

$$\frac{\alpha\beta'}{\beta\beta'} = \frac{p}{n}, \quad \frac{\alpha'\beta}{\beta\beta'} = \frac{q}{n}$$

Da nun:

$$\frac{\alpha}{\beta} \gtrless \frac{\alpha'}{\beta'},$$

so muss auch:

$$p \gtrless q.$$

Nehmen wir $p \gtrless q+1$ an, so können wir schreiben:

$$\frac{p}{n}, \quad \frac{p \mp 1}{n}, \quad \frac{q}{n},$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

Ist aber:

$$p = q+1,$$

so wird sicher:

$$2p > 2q+1$$

und wir haben in:

$$\frac{2p}{2n}, \quad \frac{2q+1}{2n}, \quad \frac{2q}{2n},$$

die gewünschte Einschaltung.

Lehrsatz 2. Es gibt Zahlen, die sich nicht als Quotient zweier ganzen Zahlen darstellen lassen.

Beweis. Es genügt, wenn wir die Existenz einer einzigen solchen Zahl beweisen, dieses thun wir dadurch, dass wir zeigen:

Wenn eine positive ganze Zahl nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist, so kann sie auch nicht das Quadrat eines rationalen Bruches sein.

Sei D eine solche Zahl, so wird:

$$1+\lambda > \sqrt{D} > \lambda$$

wobei λ eine bestimmte ganze Zahl bezeichnet.

Nehmen wir nun an:

$$\sqrt{D} = \frac{t}{u}$$

wobei t und u relativ prime ganze Zahlen sind, also u der kleinste Nenner ist.

Aus:

$$\lambda < \frac{t}{u} < \lambda+1$$

folgt:

$$\lambda u < t - \lambda u < u$$

Nun ist aber identisch:

$$(Du - \lambda)t^2 - D(t-\lambda u)^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2)$$

also da der Voraussetzung nach:

$$t^2 - Du^2 = 0$$

auch:

$$(Du - \lambda t)^2 - D(t-\lambda u)^2 = 0,$$

d. h.:

$$D = \frac{(Du-\lambda t)^2}{(t-\lambda u)^2}$$

da nun:

$$t - \lambda u < u,$$

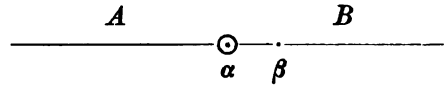
so wäre u nicht der kleinste Nenner, was der Voraussetzung widerspricht.

Es gibt also Zahlen, die sich nicht als Quotient zweier ganzen Zahlen darstellen lassen.

Wir wollen sie irrational nennen, gleichviel ob sie als Wurzelgrössen oder als Logarithmen oder als anders definierte Zahlen auftreten.

Durch den Nachweis der Existenz der irrationalen Zahlen ist nachgewiesen, dass es bei der Annahme der ganzen und rational gebrochenen Zahlen allein, in der Zahlenreihe Lücken geben würde, wie aus nachstehender Ueberlegung hervorgeht.

Denke man sich die rationalen Zahlen der Grösse nach geordnet und sei α irgend eine bestimmte rationale Zahl dieser Reihe:



Diese wird dadurch in zwei Teile A und B zerlegt. Eine jede Zahl der Abteilung A ist kleiner als eine jede der Abteilung B. Tritt dieses ein, so sagen wir, dass eine Teilung vorliegt.

Die Zahl α können wir nach Belieben zu A oder B rechnen. Dann ist aber folgendes zu bemerken:

Gehört α zu A, so ist es die grösste Zahl im Gebiete A. In B gibt es dagegen keine kleinste Zahl. Denn nehmen wir auch eine Grösse β an, so können wir nach dem Lehrsatz 1, § 1 zwischen α und β eine dritte einschalten.

Umgekehrt, rechnen wir α zu B, so gibt es in B keine grösste Zahl und α ist die kleinste Zahl im Gebiete B.

Diese Sätze lassen sich umkehren.

Es gibt Teilungen, bei welchen weder in B eine grösste, noch in B eine kleinste Zahl existiert.

Sei wieder D eine positive ganze Zahl, welche nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Bilden wir nun eine Teilung so, dass sich in B alle positiven rationalen Zahlen befinden, deren Quadrate grösser sind als D und in A seien die übrigen rationalen Zahlen, dann haben wir eine solche Teilung.

Sei:

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D}$$

und sei x eine rationale Zahl, dann ist y auch eine solche. Wir erhalten:

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^2}{(3x^2 + D)^2}$$

Sei nun x eine Zahl der Abteilung A, dann ist:

$$x^2 < D$$

und auch:

$$y^2 < D$$

also auch y eine Zahl derselben Abteilung. Nun folgt aus:

$$y - x = 2x \cdot \frac{D - x^2}{3x^2 + D}$$

dass:

$$y > x$$

Sobald ich also in A eine Zahl x annehme, so kann ich stets noch eine grössere rationale Zahl bilden. In A gibt es also keine grösste Zahl.

Nehmen wir x in der Abteilung B, so wird:

$$x^2 > D$$

also auch:

$$y^2 > D$$

und

$$y < x$$

also gibt es in B keine kleinste rationale Zahl. In unserem Falle kann die Teilung nur durch die irrationale Zahl $\sqrt{D}$ bewerkstelligt werden, also füllt diese Zahl die Lücke in den rationalen Zahlen aus.

Wir definieren nun die allgemeine irrationale Zahl dadurch, dass wir sagen, irrationale Zahlen sind solche, durch welche die Lücken der rationalen Zahlen derart erfüllt werden, dass die Zahlenreihe ein Kontinuum wird.

Um nun auch eine numerische Definition der irrationalen Zahlen zu haben, stellen wir folgende Ueberlegung an:

Lehrsatz 3. Ist N eine endliche ganze Zahl, so ist der Bruch:

$$\frac{1}{N}$$

immer ein periodischer. Denn dividiert man 1 durch N, so erhält man höchstens $N-1$ verschiedene Reste, dann muss ein früher dagewesener Rest erscheinen.

Ich kann also eine jede gebrochene Zahl charakterisieren durch:

$$\frac{m}{n} = M \cdot \frac{1}{N}$$

wobei M und N relativ prim sind. Wir können also definieren. Ist eine Reihe:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\beta_k}{10^k}$$

wobei β_k beliebige Zahlen von 0 bis 9 bezeichnet, nicht darstellbar unter der Form:

$$\dot{A} + B\Sigma$$

wobei A und B ganze Zahlen und Σ einen periodischen Bruch bezeichnen, so stellt sie eine irrationale Zahl dar.

Nachdem wir so uns eine kontinuierliche Zahl geschaffen haben, ist es leicht, durch Einführung komplexer Zahlen eine kontinuierliche Fläche zu schaffen, welche wir die Zahlenebene nennen wollen.

Nun wollen wir einige für die Folge wichtige Definitionen einführen.

Eine Grösse heisst veränderlich, wenn sie so definiert ist, dass sie unendlich viele Werte annehmen kann.

Kann sie alle Werte der Zahlenebene annehmen, dann nennen wir sie unbeschränkt veränderlich.

Die unbeschränkt veränderliche Grösse hat folgende Eigenschaften:

Ist a ein Wert derselben und δ eine positive Grösse, so gehören alle x, für welche:

$$|x - a| < \delta$$

wo δ beliebig (klein) sein kann, zu ihren Werten.

Eine veränderliche Grösse überhaupt kann ebenso definiert werden; nur braucht die obige Eigenschaft nur dann stattzufinden, wenn δ beliebig klein ist. Man sagt dann, die Grösse sei stetig veränderlich. Sämtliche Werte der Grösse bilden den Bereich derselben. Der Bereich ist im allgemeinen begrenzt.

Wir definieren: a liegt an der Grenze des Bereiches von x, wenn es in einer noch so kleinen Umgebung von a Werte gibt, die zu den definierten gehören und auch solche, die zu ihnen nicht gehören.

Unter Umgebung von a wird die Gesamtheit der Werte von x, für welche:

$$|x-a|<\delta$$

ist, wobei δ eine beliebig kleine Grösse ist. $|\ |$ heisst: der absolute Wert.

Eine veränderliche Grösse ist unendlich kleiner Werte fähig, oder kann unendlich klein werden, wenn es in ihrem Bereich Werte gibt, die ohne 0 zu sein, kleiner als eine jede gegebene, noch so kleine Grösse δ sind. Dieses wird stets zutreffen, wenn 0 im Bereiche selbst oder an der Grenze des Bereiches liegt.

Zwei veränderliche Grössen können in derartigem Zusammenhange stehen, dass zu jedem Wert von x ein oder mehrere, auch ∞ viele, aber bestimmte Werte von y gehören. Dann sagen wir: y wird mit x unendlich klein, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse ε, δ so klein genommen werden kann, dass zu jedem x, dessen Wert:

$$|x|<\delta$$

ein Wert y gehört, der:

$$|y|<\varepsilon$$

Nun ist es leicht, die Grenze zu definieren: Wir sagen, y nähert sich der Grenze g, wenn sich x der Grenze a nähert, sobald $y-g$ mit $x-a$ zugleich unendlich klein wird.

Wir sagen ferner, x wird unendlich gross, wenn es unter den Werten, die es annehmen kann, solche gibt, die grösser sind als jede noch so grosse gegebene Zahl.

Unter $x-\infty$ verstehen wir immer $\frac{1}{x}$. Beide Grössen sind nämlich lineare Funktionen von x, die unendlich klein werden, sobald x unendlich gross wird.

Wir sagen, eine Grösse y ändert sich stetig mit x, wenn y derart von x abhängt, dass unendlich kleinen Aenderungen von x unendlich kleine Aenderungen von y entsprechen.

Sei:

$$y=f(x)$$

dann muss nach Annahme eines noch so kleinen ε, δ so bestimmt werden können, dass für:

$$|h|<\delta$$

$$|f(x_0-h)-f(x_0)|<\varepsilon$$

wird.

Wir wollen ferner zwei Funktionsausdrücke $f(x)$ und $F(x)$ gleichwertig nennen, wenn für alle Werte von x die Ungleichung besteht:

$$|f(x)-F(x)|<\varepsilon$$

wo ε eine beliebig kleine Grösse bezeichnet.

Wir wollen einige Benennungen für die Unendlichkeitsstellen einführen.

Wir definieren eine logarithmische Unendlichkeitsstelle durch die Gleichung, unter A eine endliche Grösse verstanden:

$$A \log(z - z_0) \text{ für } z = z_0$$

eine algebraische Unendlichkeitsstelle durch:

$$\frac{A}{z - z_0} \text{ für } z = z_0$$

Wir haben eines Begriffes noch zu erwähnen, der in der neueren Funktionentheorie öfters genannt wird: wir meinen die Punktmenge. Dieselbe wurde von Cantor eingeführt.

Denken wir uns auf einer Geraden eine Reihe von Punkten, durch ein bestimmtes Gesetz x bestimmt, dass ihre Entfernungen von einem Nullpunkte gleich:

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \cdots$$

werden. Dann stellen die Zahlen:

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \cdots$$

eine Punktmenge (Wertmenge, Mannigfaltigkeit) dar. Enthält eine Punktmenge innerhalb eines endlichen Intervalls ∞ viele Punkte, so hat sie mindestens eine Häufungsstelle, d. h. eine Stelle, in deren Nachbarschaft ∞ viele Punkte sich vorfinden.

So ist z. B. für die Punktmenge, die durch:

$$\frac{1}{n}$$

wo n eine ganze Zahl bezeichnet, 0 eine Häufungsstelle. Die Gesamtheit der Häufungsstellen wird, falls sie wieder eine Punktmenge bilden, die erste Ableitung der Punktmenge genannt u. s. f. Ist die Anzahl der Ableitungen endlich, so hat man eine Punktmenge erster Gattung, ist sie unendlich, eine Punktmenge zweiter Gattung. Die Anzahl der Abteilungen bestimmt die Art.

Beispiele. Erste Gattung, erste Art:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5} \cdots$$

Häufungsstellen 0 um $\frac{1}{2}$, also eine einzige Ableitung.

Erste Gattung, zweite Art:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{5}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5}, \frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5} \cdots$$

Denn sie besitzt eine erste Ableitung (Häufungsstellen sind):

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$$

und eine zweite Ableitung (Häufungsstelle ist):

$$0$$

Ein Beispiel zweiter Gattung ist die Gesamtheit aller Rationalzahlen zwischen 0 und 1.

Wir beweisen nun den wichtigen Satz:

Eine jede durch unbeschränkt veränderliche reelle Grösse x definierte Wertmenge y besitzt mindestens eine Häufungsstelle.

Wir nehmen an, dass sie innerhalb eines endlichen, durch die Werte a und $a+d$ begrenzten Intervalles gegeben ist. Diese Beschränkung lassen wir später fallen. Setzen wir noch fest, dass:

$$a+d>a$$

Teilen wir das Intervall in zwei gleiche Teile:

$$\left(a,\ a+\frac{1}{2}d\right), \qquad \left(a+\frac{1}{2}d,\ a+d\right)$$

so wird eine Häufungsstelle entweder im ersten oder zweiten Intervalle oder endlich in der Mitte liegen. Im letzteren Falle ist der Satz erwiesen. Nehmen wir an, die unendliche Menge befinde sich im ersten Intervalle, so lassen sich die unendlich vielen Werte einschliessen in die Grenzen:

$$b_1 = a+\varepsilon_1\frac{d}{2} \text{ bis } b_1+\frac{d}{2}$$

wobei:

$$0<\varepsilon_1<1$$

ferner in das Intervall:

$$b_2 = b_1+\varepsilon_2\frac{d}{2^2} \text{ bis } b_2+\frac{d}{2^2}$$

u. s. w., bis endlich in das Intervall:

$$b_n = b_{n-1}+\varepsilon_n\frac{d}{2^n} \text{ bis } b_n+\frac{d}{2^n}$$

Nun ist aber:

$$b_1 = a+\varepsilon_1\frac{d}{2}$$

$$b_2 = a+\varepsilon_1\frac{d}{2}+\varepsilon_2\frac{d}{4}$$

$$\cdots\cdots$$

$$b_n = a+\varepsilon_1\frac{d}{2}+\varepsilon_2\frac{d}{4}+\cdots\quad\varepsilon_n\frac{d}{2^n}$$

Sei nun:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\frac{\varepsilon_3}{2^3}+\cdots \text{ in inf.} = \Sigma\frac{\varepsilon_\nu}{2^\nu}$$

ferner:

$$b_n = a+d\cdot\varepsilon$$

so ist durch b_n die verlangte Stelle definiert.

Dieser Beweis wurde zuerst von Bolzano gegeben aber von Weierstrass vervollständigt. Dieser Beweis gilt zunächst für eine Variable (Mannigfaltigkeit). Es lässt sich leicht zeigen, dass wenn in einer $n$fachen Mannigfaltigkeit Stellen in ∞ Anzahl definiert sind, es mindestens eine Stelle gibt, die sich dadurch auszeichnet, dass es in jeder Nähe von ihr unendlich ∞ viele Stellen gibt.

Es wird vielleicht ein Beispiel nicht überflüssig sein.

Es sei eine Punktmenge definiert durch:

$$xy^2+1 = 3x-y^2$$

wobei $x(=0, 1, 2\cdots$ d. h.) die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft; y soll wesentlich positiv sein.

Schreiben wir die Gleichung wie folgt:

$$1+y^2 = x(3-y^2)$$

so sehen wir, dass wenn:

$$y < 2$$

x negativ wird, also gehören jene Werte, für welche $y > 2$ wird, nicht zu den definierten. Wir haben also die Häufungsstelle je im Intervalle:

$$0 < y_h < 2$$

zu suchen, da y wesentlich positiv sein soll. Teilen wir nun das gegebene Intervall in zwei gleiche Teile 0 bis 1 und 1 bis 2. Es entsteht die Frage, in welchem Intervalle liegt die Häufungsstelle. Setzen wir also:

$$y = 1$$

so folgt:

$$x = 1$$

Da nun $y = 1$ den Wert $x = 1$ gibt, so muss $y = 1$ der Anfangswert der Punktmenge sein, also liegt der Häufungspunkt zwischen den Grenzen:

$$1 < y_h < 2$$

Gehen wir nun weiter und setzen:

$$y = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$$

so folgt:

$$x = 4\frac{1}{3}$$

Zwischen $x = 1$ bis $x = 4\frac{1}{3}$ können aber nur vier y Punkte liegen, demnach muss die Häufungsstelle zwischen den Grenzen:

$$\frac{3}{2} < y_h < 2$$

gelegen sein. Setzen wir ferner:

$$y = \frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

so folgt:

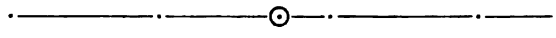
$$x = -65$$

also ist y_h enthalten zwischen:

$$\frac{3}{2} < y_h < \frac{7}{4}$$

In dieser Art fortfahrend könnten wir die Häufungsstelle, die hier offenbar $y = +\sqrt{3}$ ist, bestimmen. Wir haben absichtlich dieses Beispiel so behandelt, um die frühere etwas abstrakte Beweisführung zu illustrieren.

Stellen wir uns also die y Strecke geometrisch dar, so wird:



etwa von 1 bis A das Wertgebiet der definierten Grössen sein. A ist die Häufungsstelle. Wir haben bisher angenommen, dass x nur eine positive ganze Zahl sein soll, lassen wir diese Voraussetzung fallen, so ändert das an der Sache gar nichts. Auch dann ist A ein Häufungspunkt.

Es ist nun die Beschränkung zu heben, dass die y Werte innerhalb eines endlichen Gebietes liegen sollen.

Zu diesem Zweck teilen wir das Intervall in drei Teile:

$$-\infty \cdots a, \quad a \cdots b, \quad b \cdots +\infty$$

Das erste und letzte Intervall fällt zusammen, wenn man statt x die Variable t einführt, so dass:

$$t = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{x-a}{x-c}$$

wobei:

$$a < c < b$$

ist. Dann wird für $x = \pm\infty$

$$t = \frac{b-c}{b-a}$$

also ein positiver Bruch, also entsprechen die beiden Intervalle:

$$-\infty \cdots a, \quad b \cdots +\infty$$

von x dem Intervalle von $(0 \cdots +1)$ von t. Dann wird man so verfahren: Angenommen in $a \cdots b$ finde sich keine Häufungsstelle von x; man führe t ein. Dann hat t sicher, da es eindeutig dem Werte x entspricht, in $0 \cdots +1$ eine Häufungsstelle, die wieder einer Häufungsstelle von x in einem der Intervalle:

$$-\infty \cdots a, \quad b \cdots +\infty$$

entspricht. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Daran anschliessend beweisen wir einen zweiten wichtigen Satz:

Wenn eine reelle Variable kleiner bleibt als eine angebbare Grösse A, so gibt es für sie eine bestimmte Grenze,

d. h. es gibt einen Wert a von der Beschaffenheit, dass die Variable nie grösser wird als a, dass es aber mindestens einen Wert der Variablen gibt, für welchen gilt:

$$a > x > a - \delta$$

wo δ eine beliebig kleine Grösse ist. Dieser von Bolzano bewiesene Satz, wird später zum Beweise der Existenz einer Wurzel bei den algebraischen Gleichungen benützt.

Nach der Behauptung gehören nicht **alle** x zu den definierten, doch wissen wir, dass Werte von:

$$x < A$$

dazu gehören; über die Werte:

$$x \geq A$$

können wir nur aussagen, dass es unter ihnen solche geben kann, die zu den definierten gehören, dagegen können wir behaupten, dass es unter ihnen gewiss solche gibt, die zu den definierten nicht gehören und zwar ∞ viele. Ebenso können wir eine Grenze D angeben, oberhalb welcher es sicher keinen definierten Wert geben kann, d. h. es gibt kein:

$$x \geq A + D.$$

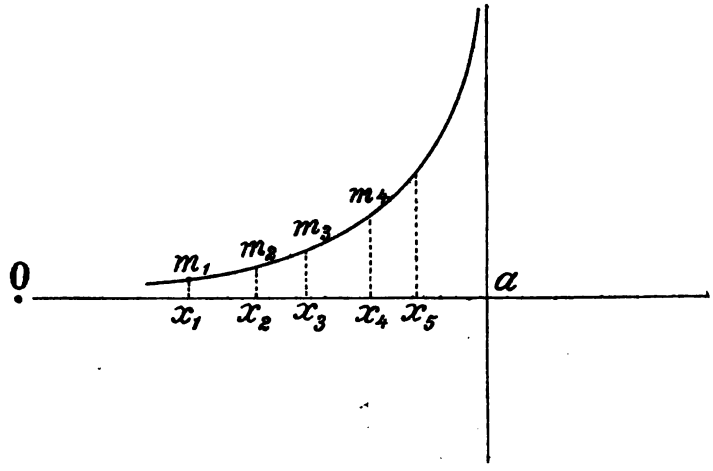
Indem wir nun analog verfahren, wie im vorhergehenden Beweise, gelangen wir durch Halbierung der Intervalle zu der gewünschten Grenze:

$$a = A + D\left(\frac{\Theta_1}{2} + \frac{\Theta_2}{2^2} + \cdots \quad \frac{\Theta_n}{2^n} + \cdots\right)$$

wobei $\Theta < 1$ anzunehmen sind.

Auf den ersten Blick möchte es scheinen, dass dieser Satz selbstverständlich ist. In der That, solange man ihn geometrisch interpretiert, ist dieses der Fall. Wir müssen ihn aber rein algebraisch beweisen können und algebraisch ist er nicht sofort einleuchend.

Figur 1.



Man darf also nicht sagen: Gehören nicht alle x zu den definierten, sondern nur jene, die kleiner sind als eine angebbare Grösse, dann gibt es ein grösstes x.

Um dieses einzusehen, wollen wir eine geometrische Betrachtung einschalten.

Denken wir uns eine gleichseitige Hyperbel, bezogen auf ihre Achsen als Koordinaten und auf dieser gleiche Bogenstücke abgeschnitten:

$$m_1 m_2 = m_2 m_3 = m_3 m_4 = \cdots$$

dann definieren ihre Projektionen eine Punktreihe:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots$$

auf der Abcissenachse. Alle so erhaltenen Abscissen sind kleiner als jene der Asymptote. Es gibt kein grösstes x, sondern nur eine Grenze a, der die x beliebig nahe kommen können.

§ 2. Die geschichtliche Entwicklung des Funktionsbegriffes.

Für Leibnitz, den Begründer der Funktionentheorie, waren die Begriffe algebraischer Ausdruck und Funktion gleich.

Funktion im Sinne Leibnitz' war ein jeder Ausdruck, der aus einer oder mehreren variablen Grössen durch in endlicher Anzahl wiederholte Anwendung der Elementaroperationen entstanden ist.

Er schrieb also:

$$y = f(x)$$

wobei f einen algebraischen Ausdruck bezeichnet und sagte, y sei eine Funktion von x.

Indem man sich das Problem vorlegte, x zu bestimmen, wenn y gegeben war, so hat man eingesehen, dass eine endliche Wiederholung der Elementaroperationen nicht genügt. Zu dieser Ueberzeugung kam man bei der Einführung der inversen Operationen.

Man definierte nun die Funktion ganz allgemein: Es sind n Abhängigkeiten gegeben von $n+m$ Veränderlichen gleich 0 gesetzt, also:

$$f_1(x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n+m}) = 0$$
$$f_2(x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n+m}) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n+m}) = 0$$

Man soll, indem m der Variablen bestimmte Werte zuerteilt werden, das Wertsystem der übrigen bestimmen.

So fassten Euler, Lagrange, Lacroix etc. den Funktionsbegriff auf.

Noch abstrakter wurde der Funktionsbegriff von Johann Bernoulli aufgefasst:

Wenn $n+m$ Grössen in einer solchen Abhängigkeit stehen, dass bestimmmten Werten der m Grössen ein System bestimmter Werte der n übrigen entspricht, dann ist jede der letzteren eine Funktion der m Grössen.

In diesem Sinne ist z. B. die Ausdehnung eine Funktion der Temperatur. Diese Definition ist allgemeiner als die vorhergehende, da sie keinen algebraischen Ausdruck voraussetzt.

Einen wesentlichen Wendepunkt in der Geschichte des Funktionsbegriffes bildet die Einführung der Stetigkeit. Man hatte eine Eigenschaft der stetigen Funktionen entdeckt, die viel versprechend schien.

Für eine stetige Funktion lässt sich leicht der Begriff eines bestimmten Integrals fixieren. Man glaubte nun, dass sich sodann eine jede stetige Funktion durch die Fouriersche Reihe rechnerisch darstellen lasse.

Fourier stellte 1807 die Behauptung auf: Wenn man in der Reihe

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(a_\varkappa \sin \varkappa x + b_\varkappa \cos \varkappa x)$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha)$$

$$b_\varkappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos \pi\alpha\, d\alpha$$

$$a_\varkappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin \pi\alpha\, d\alpha$$

setzt, so stellt diese Reihe allemal für jeden Wert von x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ die Funktion $f(x)$ dar.

Später hat (1829) Dirichlet noch gezeigt, dass die Fouriersche Reihe für eine Funktion, die

α) nicht unendlich wird,

β) nicht unendlich viel Unstetigkeiten,

γ) nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt,

konvergiert gegen den Wert der Funktion an allen Stellen, ausser den Unstetigkeitsstellen, wo sie gegen den Mittelwert aus beiderseitigen Grenzwerten konvergiert. Es sind dieses die sog. Dirichletschen Bedingungen. Dabei muss man aber mit Riemann von vornhinein festsetzen, dass der Wert einer Funktion an einer Unstetigkeitsstelle dem Mittelwerte aus den beiderseitigen Grenzwerten gleich sein soll. Doch sind auch dann die Dirichletschen Bedingungen keine notwendige, sondern nur hinreichende.

Später konnte man noch die Darstellbarkeit so weit erweitern, dass man (Hankel 1870, Universitätsschrift) behauptete, „es sei durch Dirichlet, Lipschitz und Riemann erwiesen, dass alle stetigen Funktionen in eine Fouriersche Reihe entwickelbar sind", P. du Bois-Reymond bewies aber die Unhaltbarkeit dieses Satzes, indem er ein Beispiel gab, dass dieses nicht stattfindet.

Das Du Bois Reymondsche Beispiel lässt sich einfach wie folgt angeben:

Das Intervall von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 sei in ∞ viele bis zur 0 werdende Intervalle eingeteilt:

$$\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{(1)}, \quad \frac{\pi}{(1)} \cdots \frac{\pi}{(2)}, \quad \frac{\pi}{(\lambda)} \cdots \frac{\pi}{(\mu)}, \quad \cdots .$$

wobei:

$$(\lambda) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2\lambda + 1$$

und

$$\text{Lim. } \mu = \infty$$

sein soll. Im λten Intervalle sei eine Funktion:

$$f(\beta) = c_\lambda \sin(\lambda\beta)$$

wo $c_\lambda \cdots$ eine bis zur Null abnehmende Reihe bilden. Diese Funktion ist a priori stetig; sie nimmt, wenn sich β der Stelle 0 nähert, mit ∞ vielen Maximis und Minimis ab.

Wir setzen fest, dass für $\beta = 0$ auch $f(\beta) = 0$ sei. Dann lässt sich zeigen, dass die Fouriersche Reihe, welche die angegebene stetige Funktion sonst darstellt, an der Stelle 0 nicht konvergiert.

Mit diesem Beweise erhielt auch diese Definition der Funktion den Todesstoss.

Auch eine andere Eigenschaft, die man für stetige Funktion als selbstverständlich ansah, nämlich die Existenz des Differentialquotienten, erwies sich als unrichtig. Funktionen oben betrachteter Art, also z. B. die Funktionen:

$$b \sin \alpha t + b^2 \sin \alpha^2 t + b^3 \sin \alpha^3 t + \cdots$$
$$b \cos \alpha t + b^2 \cos \alpha^2 t + b^3 \cos \alpha^3 t + \cdots$$

wobei:

$$a \text{ und } b \text{ positive Zahlen}$$
$$b < 1, \quad ab > 1$$

sind, wie wir im nachstehenden Paragraphen nachweisen, stetige Funktionen, die keinen Differenzialquotienten besitzen.

Wenn wir auch in der Stetigkeit das Charakteristische der „vernünftigen Funktionen", wie sie Jacobi nennt, erblicken und es mit Heine (Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., I, p. 35) dahingestellt sein lassen, ob die unstetigen Funktionen überhaupt in der Natur vorkommen, so sehen wir dennoch ein, dass die Fourierschen Reihen sich zur Definition der Funktion nicht eignen.

Ist die Funktion etwas anderes, als nur ein formales Resultat, der aus ökonomischen Rücksichten eingeführten Schreibweise für einfaches Zählen, dann existiert sie sicher als ein selbständiger Begriff, dem gewisse Eigenschaften zukommen. Und diese zu suchen ist die Aufgabe der Funktionentheorie.

Wir haben bisher nur reelle Grössen im Auge gehabt. Von Euler wurden zuerst die komplexen Argumente eingeführt. Euler bewies die Gleichung:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

Durch Einführung komplexer Argumente wurden früher isoliert stehende Funktionen mit einander verbunden. Hieraus ergibt sich ohne weiteres, dass

für die Erkenntnis der Eigenschaften der Funktionen die Einführung komplexer Argumente unerlässlich ist. Noch klarer tritt das bei den periodischen Funktionen zu tage.

Für die Teilung der periodischen Funktion $\sin x$ besteht die Gleichung:

$$\sin x = R_n\left(\sin\frac{x}{n}\right)$$

d. h. $\sin x$ ist eine rationale Funktion vom Grade n des Argumentes $\sin\frac{x}{n}$. Bei den elliptischen Funktionen findet man aber eine Funktion vom Grade n^2.

Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass eine Funktion zwei reelle Perioden nicht haben kann.

Denn seien a und b reelle inkommensurable Grössen und $\frac{m}{n}$ ein Näherungsbruch des Verhältnisses $\frac{a}{b}$, so wird:

$$\Omega = na - mb = \varepsilon\frac{b}{n}, \quad \varepsilon < 1$$

Da man n so gross nehmen kann als man will, so kann Ω kleiner gemacht werden als jede noch so kleine angebbare Grösse und es ist somit klar, dass es keine doppelt periodische Funktion geben kann, wo das Verhältnis der Perioden reell und inkommensurabel ist.

In der That haben die Arbeiten von Abel und Jacobi die Existenz komplexer Perioden bestätigt. Hieraus folgt, dass eine Funktion nur dann gehörig definiert ist, wenn es feststeht, welche komplexe Werte dem Argumente beigelegt werden dürfen.

Cauchy hat eine Eigenschaft der Funktionen komplexer Variablen entdeckt, die sich wie folgt ausdrücken lässt: ist

$$w = f(z)$$

und

$$z = x + iy$$

so besteht die Gleichung:

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Auf Grund dieser Eigenschaft hat nun Riemann wie folgt die Funktion definiert.

Ist eine Grösse w mit einer anderen $x+iy$ in derartiger Verbindung, dass immer:

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

und w sich dieser Gleichung gemäss stetig ändert, so ist w eine Funktion des komplexen Argumentes:

$$x + iy$$

Diese Definition der Funktion ist wertvoll, da sie zu einer sehr fruchtbaren Veranschaulichung der Funktionen und ihrer Eigenschaften führt. Principiell stellen sich ihr aber Schwierigkeiten entgegen, von denen wir nur eine hervorheben wollen: In der Definition ist die Notwendigkeit eines Differentialquotienten ausgesprochen, aber nicht begründet. Abgesehen davon, wie wir früher erwähnt haben und sogleich beweisen werden, dass es Abhängigkeiten gibt, die nicht immer einen Differentialquotienten besitzen, ist der Begriff des

Differentialquotienten ein viel zu komplizierter, als dass er an die Spitze einer w fundamentalen Definition gestellt werden könnte.

Nebenbei gibt es noch eine principielle Schwierigkeit. In Riemanns Definition ist der Begriff der Funktion noch zu sehr an den algebraischen Ausdruck gebunden.

Ein algebraischer Ausdruck ist allein nicht imstande eine Funktion zu definieren.

Tannery hat auf die Funktion:

$$\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x} + 2\frac{x}{x^2-1} + 2\frac{x^2}{x^4-1} + 2\frac{x^4}{x^8-1} + \cdots$$

aufmerksam gemacht.

Der Konvergenzbereich dieser Reihe besteht aus zwei durch die Peripherie des Einheitskreises getrennten Stücken. Der Ausdruck selbst wird für:

$$|x| < 1 \text{ immer } = +1$$
$$|x| > 1 \text{ immer } = -1$$

und ist für $|x| = 1$ divergent.

Seien nun F_1 und F_2 zwei beliebige Funktionen von x, so stellt die Funktion:

$$\frac{1}{2}(F_1 + F_2) + \psi(x)\frac{1}{2}(F_1 - F_2)$$

für:

$$|x| < 1$$

die Funktion F_1 dagegen für:

$$|x| > 1$$

die Funktion F_2 dar.

Wir sind also im stande zwei willkürlich gegebene Funktionen durch denselben Ausdruck darzustellen. Weierstrass war der erste, der darauf aufmerksam gemacht hat, dass die beiden Begriffe, algebraischer Ausdruck und Funktion, sich nicht decken.

Indem nun Weierstrass als Element der Funktion die Potenzreihe:

$$f(x \mid a) = \sum_{\lambda,0}^{\infty} c_\lambda (x-a)^\lambda$$

auffasst, beweist er, dass man dem Princip der Stetigkeit genügen kann, wenn man den Begriff der gleichmässigen Konvergenz einführt. Durch die Einführung des Begriffes der ineinander fortsetzbaren Reihen wird es dann möglich, eine Definition der Funktion zu geben, die vorderhand als die beste bezeichnet werden muss.

§ 3. Riemann-Cauchys Funktionentheorie.

Sobald wir die Annahme der Permanenz der formalen Gesetze machen, ist die allgemeinste Zahlenform gegeben durch:

$$z = x + iy$$

Es lässt sich zeigen, dass die Einführung anderer Einheiten als:

$$1 \text{ und } i = \sqrt{-1}$$

unnütz ist. Das wurde u. a. von Weierstrass und Dedekind gezeigt.

Für unsere Zahlenform existieren folgende Principe:

α) das associative Princip:

$$ab \cdot c = a \cdot bc, \quad (a+b)+c = a+(b+c)$$

β) das kommutative Princip:

$$ab = ba, \quad a+b = b+a$$

γ) das distributive Princip:

$$a(b+c) = ab+ac$$

Wollte man andere Einheiten einführen, die aus 1 und $\sqrt{1}$ nicht ableitbar sind, so müsste eins von diesen Principen aufgegeben werden.

So hat z. B. Hamilton die Quaternionen eingeführt:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

wobei:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij + ji = 0$$
$$ik + ki = 0$$
$$kj + jk = 0,$$

demnach besteht für die aus solchen Einheiten gebildeten Zahlen das kommutative Princip nicht. Für die Schefflerschen Grössen:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{-1} + \alpha_2 \sqrt{\div 1}$$

gilt wieder das distributive Princip nicht.

Setzt man:

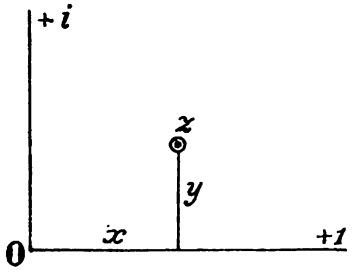
$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

so folgt:

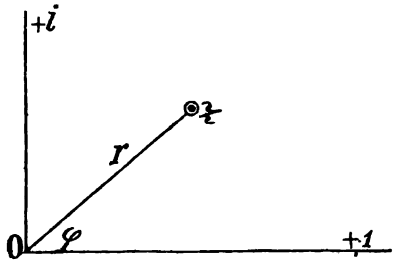
$$z = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

Dabei wird r der Modul und φ das Argument genannt. Die geometrische Darstellung, die wir als bekannt voraussetzen, ist an den nachstehenden Figuren unmittelbar klar:

Figur 2.



Figur 3.



Sei nun $f(z)$ eine Funktion von z von der Beschaffenheit, dass jedem Wert von z wenigstens ein bestimmter Wert von $f(z)$ entspricht, dann wird:

$$w = f(z) = f(x+iy) = u+iv$$

sein, wobei u und v im allgemeinen Funktionen von x, y sein werden.

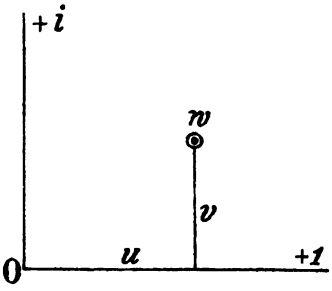
Wählen wir nun für u, v eine ähnliche Abbildung wie für x, y, so erhalten wir eine neue Ebene.

Für die Darstellung einer komplexen Funktion von oben angeführter Beschaffenheit brauchen wir also zwei Bildebenen.

Wir wollen ein paar wichtige Abbildungen kennen lernen. Wählen wir:

$$w = \cos z$$

Figur 4.



so wird:

$$w = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x$$

also:

$$u = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x$$

$$v = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x$$

Lassen wir nun den Punkt z eine Kurve durchlaufen, so wird auch der Punkt w eine Kurve durchlaufen.

Setzen wir z. B. $y =$ konstant, x beliebig, so folgt durch Elimination von x aus den beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{2u}{e^y + e^{-y}}\right)^2 + \left(\frac{2v}{e^y - e^{-y}}\right)^2 = 1$$

d. h. der Punkt w wird eine Ellipse durchlaufen.

Ist x konstant, y aber variabel, dann ergibt sich:

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = 1$$

also die Gleichung einer Hyperbel, welche mit der früher betrachteten Ellipse homofokal ist.

Ein anderes Beispiel liefert die Funktion:

$$w = \frac{1}{z}$$

Hier wird:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

also:

$$(u^2 + v^2)\,(x^2 + y^2) = 1$$

Diese Gleichung interpretiert in unserem Sinne die für die mathematische Physik so wichtige Transformation durch reciproke Radien. Auch das erst angeführte Beispiel hat eine ähnliche Bedeutung, denn es stellt die Beziehung zwischen den rechtwinkligen und den sogenannten elliptischen Coordinaten dar.

Man entnimmt hieraus, dass das Studium derartiger Abbildungen an und für sich nicht ohne Interesse ist.

Wir müssen unterscheiden zwischen komplexen Funktionen und Funktionen komplexer Variablen. Wir haben zuerst nachzusehen, wann eine komplexe Funktion die Funktion einer komplexen Variablen wird, d. h.:

Unter welchen Bedingungen stellt:

$$w = u + iv$$

eine Funktion von:

$$z = x + iy$$

dar.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den sofortigen und dauernden Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das **vollständige**

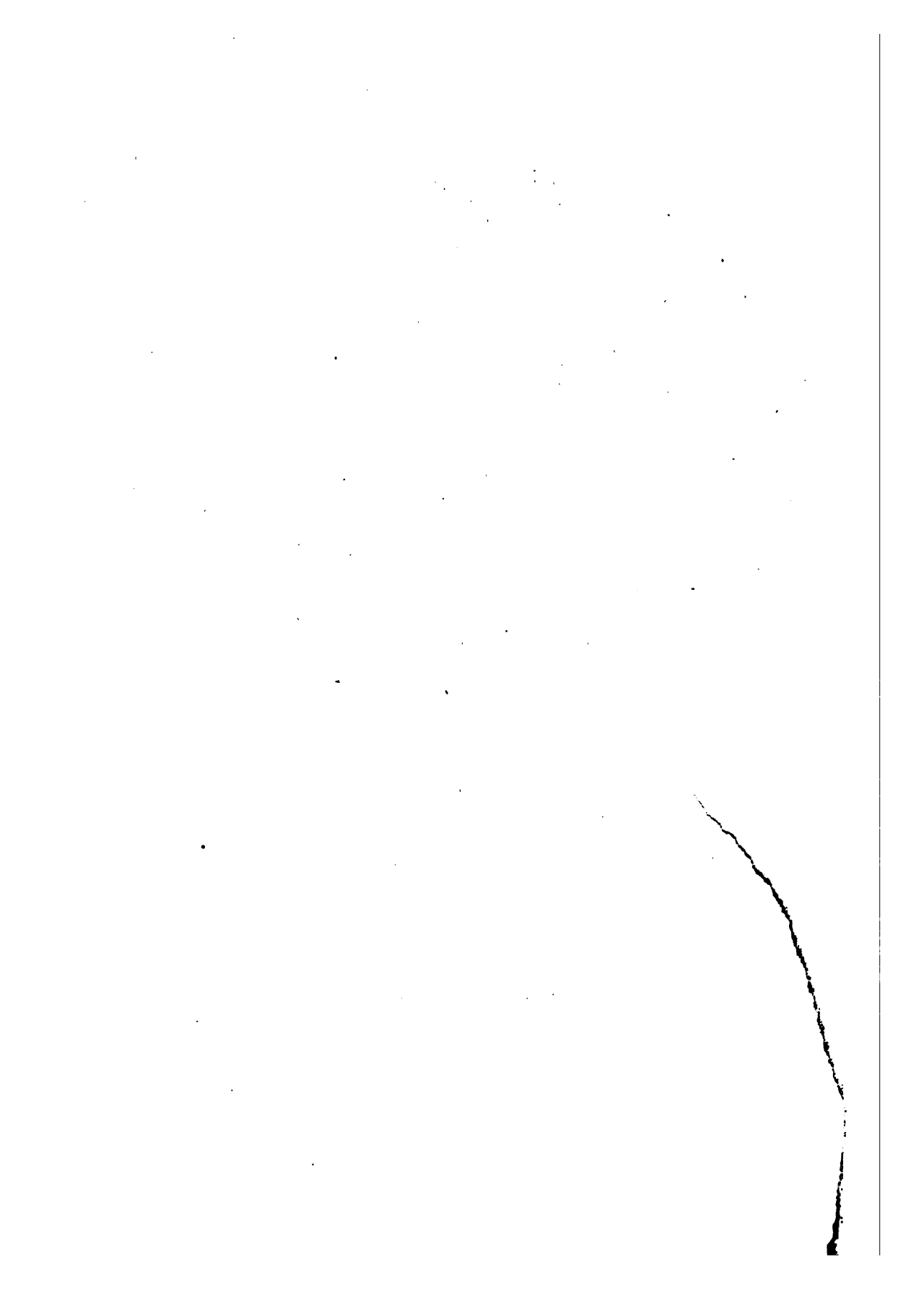
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



1307. Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Einführung in die Funktionentheorie.
Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.
Forts. v. Heft 1306. — Seite 17—32.
Mit 12 Figuren.

Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Einführung in die Funktionentheorie.

Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.

Bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1306. — Seite 17—32. Mit 12 Figuren.

Inhalt:

Riemann-Cauchys Funktionentheorie. — Theorie der komplexen Integrale. — Fortsetzung der Funktionentheorie nach Riemanns Anschauung.

Stuttgart 1894.

Verlag von Julius Maier.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer**, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Man hat offenbar:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = i$$

ferner:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial z}$$

also auch:

$$i\,\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Diese Gleichung stellt das sogenannte Cauchysche Kriterium dar.

Riemann hat auf Grund dieses Kriteriums den Begriff einer Funktion wie folgt festgesetzt.

Ist eine Grösse w mit einer anderen Grösse:

$$z = x + iy$$

derart in Verbindung, dass stets die Differentialgleichung:

$$i\,\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

besteht und w sich ihr gemäss stetig ändert, so ist w eine Funktion des komplexen Argumentes:

$$x + iy$$

Das Cauchysche Kriterium kann auch durch nachstehende Systeme ersetzt werden:

$$\text{II} \ldots \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

oder:

$$\text{III} \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Sei z. B.:

$$w = z^3 + 3z + 1$$

so wird:

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x + 1$$

$$v = -y^3 + 3yx^2 + 3y$$

und man erhält:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6y - 6y = 0$$

Cauchys Kriterium ist ein notwendiges. Es kann gezeigt werden, dass es auch ein hinreichendes ist. Denn eliminiert man unter Zuhilfenahme des Cauchyschen Kriteriums aus dem Differentialquotienten dw eine der Variablen,

etwa x, so fällt auch y aus, d. h. der partielle Differentialquotient wird mit dem totalen identisch, also w eine Funktion von z allein.

Bilden wir nun:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy}$$

also wird:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

Führt man die Gleichungen II ein, so folgt:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\delta u}{\delta x} + i\frac{\delta v}{\delta x}$$

also wird:

$$\frac{dw}{dz} \text{ von } \frac{dy}{dx}$$

unabhängig. Man könnte also auch die Funktion wie folgt definieren: „Eine veränderliche komplexe Grösse w ist eine Funktion der Veränderlichen z, wenn sie sich mit ihr so ändert, dass der Wert der Derivierten:

$$\frac{dw}{dz}$$

unabhängig von dz wird.

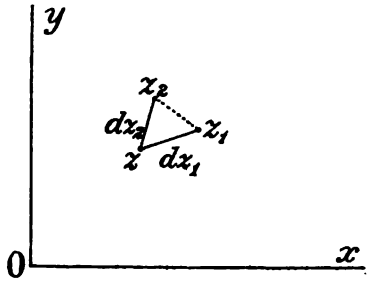
Cauchy nennt jene Funktionen monogen, deren Differential ganz unabhängig ist von der Beschaffenheit des Zuwachses:

$$dx + i\,dy$$

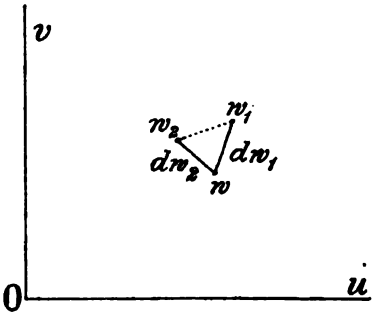
derselbe möge reell, rein imaginär oder komplex sein. In der algebraischen Analysis wird nachgewiesen, dass alle algebraische Funktionen Exponentialgrössen, Logarithmen und trigonometrische Funktionen monogene Funktionen sind. Zufolge dieser Unabhängigkeit existiert noch eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft: die Konformität der Abbildungen zwischen z und w.

Es sei z ein Punkt der xy Ebene und w ein Punkt der uv Ebene. Lässt man nun die Variable sich unendlich wenig nach zwei Richtungen ändern, so wird:

Figur 5.



Figur 6.



$$dz_1 = dx_1 + i\,dy_1$$
$$dz_2 = dx_2 + i\,dy_2$$

Man erhält in beiden Ebenen je drei sich entsprechende Punkte:

$$\begin{matrix} z & z_1 & z_2 \\ w & w_1 & w_2 \end{matrix}$$

Nun ist aber:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du+idv}{dx+idy}$$

unabhängig von dz, also muss:

$$\frac{dw_1}{dz_1} = \frac{dw_2}{dz_2}$$

oder:

$$\frac{du_1+idv_1}{dx_1+idy_1} = \frac{du_2+idv_2}{dx_2+idy_2}$$

Setzt man nun:

$$dw_1 = \eta_1 e^{i\varphi_1}, \quad dw_2 = \eta_2 e^{i\varphi_2}$$
$$dz_1 = \vartheta_1 e^{i\Theta_1}, \quad dz_2 = \vartheta_2 e^{i\Theta_2}$$

so folgt:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} e^{i(\Theta_1-\Theta_2)}$$

also:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$$
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Theta_1 - \Theta_2$$

d. h. die aus den Punkten (zz_1z_2) und (ww_1w_2) gebildeten Dreiecke sind einander ähnlich. Von diesem Satz wird in der Kartographie Gebrauch gemacht.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass jedem Wert von z ein und nur ein Wert von w entspricht. Derartige Funktionen wollen wir eindeutige nennen. Es gibt aber auch Funktionen, bei welchen im allgemeinen jedem Werte von z mehrere Werte von w entsprechen; solche wollen wir mehrdeutige, speziell $n$deutige nennen. So ist z. B.:

$$w = za + \sqrt{z-b}$$

eine zweideutige Funktion, denn wir haben:

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix} = za \pm \sqrt{z-b}$$

Eine $n$deutige Funktion kann Punkte haben, in welchen mehrere Punkte zusammenfallen. Diese werden Verzweigungspunkte genannt. In dem soeben betrachteten Beispiel ist:

$$z = b$$

ein solcher Verzweigungspunkt. Betrachten wir die Funktion:

$$w = \sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{1}{2}\varphi + i\sin\frac{1}{2}\varphi\right)$$

Lässt man z einen vollen Umlauf um den 0 Punkt, der hier zugleich Verzweigungspunkt ist, vollenden, so wird:

$$w_1 = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{1}{2}\left(\varphi+2\pi\right)+i\sin\frac{1}{2}\left(\varphi+2\pi\right)\right] = -w$$

Lässt man ihn noch einen Umkreis machen, so wird:

$$w_2 = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{1}{2}\left(\varphi+4\pi\right)+i\sin\frac{1}{2}\left(\varphi+4\pi\right)\right] = w$$

Wir sehen also, dass die Funktion nach einem Umlauf ihren Wert geändert, und nach zwei Umläufen wieder erhalten hat. Es lässt sich zeigen, dass dieses eine charakteristische Eigenschaft der Verzweigungspunkte ist.

Riemann hat gezeigt, dass man sich von der Mehrdeutigkeit der Funktionen freimachen kann, wenn man sich die nach ihm benannten Flächen konstruiert.

Wir definieren: Eine $n$blätterige Riemannsche Fläche ist der geometrische Ort von Punkten, von welchem die ursprünglich $n$deutige Funktion jetzt eindeutig abhängt.

Riemann denkt sich statt einer w Fläche, mehrere übereinander gelagert und zwar n bei einer n-deutigen Funktion. Jedem Punkte in jedem Blatte entspricht nur ein einziger Wert der Funktion. In den Verzweigungspunkten, wo die Funktionswerte zusammenfallen, hängen die Blätter zusammen. Beispiel:

$$w = \sqrt[3]{z} = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

Die Funktion w hat die Werte:

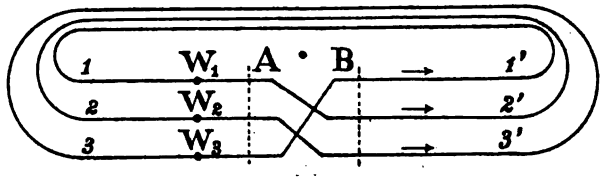
$$w_1 = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$w_2 = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$$

$$w_3 = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)$$

Diese sind identisch mit den w Werten, die man erhält, wenn die Variable z den Verzweigungspunkt $z = 0, 1, 2$ umkreist.

Figur 7.



Denken wir uns also drei Blätter $11'$, $22'$, $33'$ so verbunden wie die Figur es anzeigt; so sehen wir, dass, während der Punkt z den Nullpunkt dreimal umkreist, der Punkt w den Weg $12' \cdots 23' \cdots 31'1$ durchläuft.

Natürlich muss man sich die drei Flächen 1, 2, 3 und auch den Teil AB als zusammenfallend denken. Dann erhält man die Vorstellung einer dreiblätterigen Riemannschen Fläche.

Denkt man sich von dem Punkt $w_0 = 0$ ins Unendliche eine Linie gezogen, längs welcher die Blätter so zusammengefügt werden, wie es zwischen A und B in der Figur 7 angedeutet, so führt diese den Namen Verzweigungsschnitt. Wir sind also im stande, vermittels der Riemannschen Flächen eine Funktion überhaupt so darzustellen, dass immer der bildlichen Darstellung des z Punktes eine bestimmte Darstellung des w Punktes entspricht, so dass alle Mehrdeutigkeiten vermieden sind.

Der Vorteil, den man erreicht, ist der, dass man klar den Verlauf der ganzen Funktion überschaut, sobald man sich für diese eine Riemannsche Fläche konstruiert hat.

Ausser den Verzweigungspunkten haben wir noch jene Punkte in Betracht zu ziehen, in welchen die Funktion unstetig wird.

Wir haben zweierlei Unstetigkeit zu betrachten. Wird:

$$\frac{1}{f(z)} = 0$$

für $z = a$, von welcher Seite man sich auch der Variablen nähern mag, d. h.:

$$\text{Lim.}\ \frac{1}{f(a+\varepsilon)} = \text{Lim.}\ \frac{1}{f(a-\varepsilon)}$$

für Lim. $\varepsilon = 0$, so haben wir eine Unstetigkeit erster Gattung (polare Unstetigkeit). Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \text{ für } z = \infty \text{ wird } \frac{1}{\sqrt{z}} = 0$$

Ist dieses nicht der Fall, d. h. ist:

$$\text{Lim.}\ \frac{1}{f(a+\varepsilon)} \gtrless \text{Lim.}\ \frac{1}{f(a-\varepsilon)}$$

so haben wir eine Unstetigkeit zweiter Gattung. Beispiel:

Sei Lim. $\varepsilon = 0$, so wird:

$$\text{Lim.}\ \varepsilon^{+\frac{1}{\varepsilon}} = \infty$$

$$\text{Lim.}\ \varepsilon^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 0$$

Eine eindeutige Funktion, die keine anderen als polare Unstetigkeiten besitzt, soll eine einwertige genannt werden.

Sei nun $\varphi(z)$ eine einwertige Funktion und

$$\text{Lim.}\,[(z-a)\,\varphi(z)] \gtrless 0$$

dann wird $\varphi(z)$ für $z = a$ unendlich gross. Es ist aber möglich, dass es eine Zahl μ gibt; die grösser als 1 ist und für welche:

$$\text{Lim.}\,[(z-a)^{\mu}\,\varphi(z)]$$

einen endlichen Wert besitzt. Sei:

$$n < \mu < n+1$$

so wird:

$$\text{Lim.}\,[(z-a)^{n+1}\,\varphi(z)] = \text{Lim.}\,[(z-a)^{n+1-\mu}\,(z-a)^{\mu}\,\varphi(z)] = 0$$

dann ist:

$$f(z) = (z-a)^{n}\,\varphi(z)$$

eine Funktion, die für $z = a$ endlich bleibt. Setzen wir:

$$\text{Lim.}\,(z-a)^{n}\,\varphi(z) = C_{n_{(z=a)}}$$

so wird:

$$\text{Lim.}\,[(z-a)^{n}\,\varphi(z) - C_{n}] = 0$$

daher:

$$\text{Lim.}\left[(z-a)^{n-1}\,\varphi(z) - \frac{C_{n}}{z-a}\right] \gtrless 0$$

So fortfahrend erhalten wir:

$$\varphi(z) = \psi(z) + \sum_{1}^{n} \frac{C_{k}}{(z-a)^{k}}$$

$\varphi(z)$ ist dann für $z = a$ endlich und eindeutig. Dass die Unstetigkeit, welche durch das Unendlichwerden $n$ter Gattung entsteht, eine polare ist, folgt aus:

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^n}$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^n}{F(z)}$$

Denn es ist $F(z) \gtrless 0$, aber endlich, also:

$$\frac{1}{f(z)} = 0$$

Umgekehrt ist eine Funktion in einem Punkte unstetig, so kann sie nur unendlich von bestimmter Ordnung sein. Daraus folgt aber, dass ein Punkt z, in dessen Bereiche die Funktion nach $z - a$ entwickelt, unendlich viele negative Potenzen enthält, nicht polarunstetig sein kann, sondern wesentlich unstetig von zweiter Gattung sein muss.

Weierstrass nennt die Unstetigkeit erster Art (polare Unstetigkeit) eine ausserwesentlich-, die Unstetigkeit zweiter Art eine wesentlich-singuläre Stelle.

§ 4. Theorie der komplexen Integrale.

Die imaginären Grössen wurden frühzeitig in die Integralrechnung eingeführt. Euler und Laplace substituieren oft imaginäre Werte in Integrale und leiten so neue ab.

So setzt z. B. Euler in das Integral:

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\log x}\, dx = \log \frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

$\alpha = ui$, $\beta = mi$, wodurch:

$$x^\alpha = e^{ui \log x} = \cos(u \log x) + i \sin(u \log x)$$

und analog x^β sich darstellt. Darum erhält er:

$$\int_0^1 \frac{\cos(m \log x) - \cos(u \log x)}{\log x}\, dx = i \int_0^1 \frac{\sin(m \log x) - \sin(u \log x)}{\log x}\, dx =$$

$$\log \frac{mi+1}{ui+1} = \frac{1}{2} \log \frac{1+m^2}{1+u^2} + i \operatorname{acctg} \frac{m-u}{1+mu}$$

Durch Trennung des reellen Teiles vom imaginären erhält man zwei neue Integrale.

Weiter ging Poisson (1811), der zeigt, dass man die gewöhnliche Definition des bestimmten Integrals nicht ohne weiteres auf das komplexe Integral übertragen darf. Cauchy und Riemann haben später dargethan, dass der Wert eines komplexen Integrals vom Integrationsweg abhängt.

Seien also:

$$u = \varphi(xy) \quad v = \psi(xy)$$

zwei beliebige reelle Funktionen, dann definieren wir das Integral:

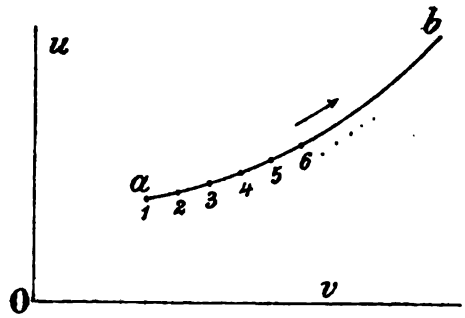
$$\int_a^b u\, dv$$

durch:

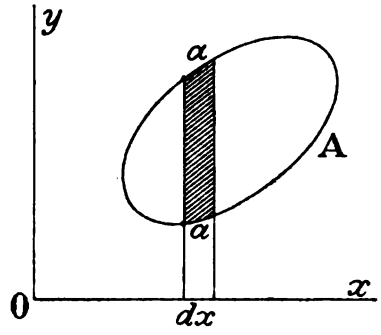
$$u_{12}(v_2 - v_1) + u_{23}(v_3 - v_2) + \ldots.$$

wobei dem Kurvenstück ab die Punkte 1, 2, 3 .... angehören (siehe Figur 8),

Figur 8.



Figur 9.



u_{12} ist der Mittelwert der Funktion zwischen den Punkten 1 und 2 etc.

Uns interessiert zunächst jener Fall, wo die Kurve eine geschlossene ist. Sei sodann (siehe Figur 9):

$$v = x$$

$$u = \int_a^a \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

also ein Integrationselement:

$$u_{12}(v_2 - v_1) = \int_a^a \frac{\partial w}{\partial y} dy \; dx$$

Wir haben also, wenn wir über die ganze Kurve integrieren:

$$\int_A w \, dx = \int\int \frac{\partial w}{\partial y} dy \; dx$$

Analog wenn wir die Fläche parallel zu x zerlegen:

$$\int_A w \, dy = \int\int \frac{\partial w}{\partial x} dx \; dy$$

Setzten wir in diese allgemeinen Transformationsformeln eines Flächenintegrals ein Linienintegral, das eine Mal $w = v$, sodann $w = u$, und addieren, so folgt:

$$\int_A (u \, dx + u \, dy) = \int\int \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \; dy$$

Sei nun:

$$w = u + iv$$

eine Funktion komplexer Variablen, so ist bekanntlich:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

also wird auch:

$$\int_A (u \, dx + u \, dy) = 0$$

Wird wieder das eine Mal $w = u$, sodann $w = -v$ gesetzt, so folgt analog:

$$\int_A (u\,dx - v\,dy) = 0$$

Da nun:

$$f(z)\,dz = (u + iv)\,(dx + i\,dy) = (u\,dx - v\,dy) + i\,(u\,dy + v\,dx)$$

ist, so wird:

$$\int_A f(z)\,dz = \int_A (u\,dx - v\,dy) + i \int_A (u\,dy + v\,dx)$$

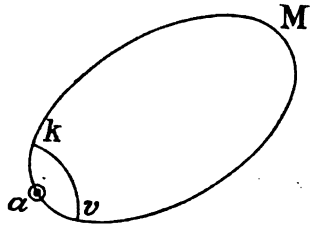
also:

$$\int_A f(z)\,dz = 0$$

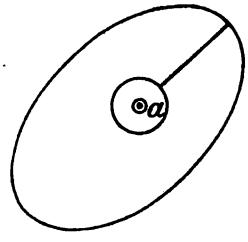
Dabei ist aber zu merken, dass sich die Integration über die Begrenzung einer Fläche erstreckt, die geschlossen ist und innerhalb welcher die Funktion überall stetig, endlich und eindeutig bleibt. Derartige Funktionen sollen kurz nach Cauchy **synektische Funktionen** genannt werden.

Liegt auf dem Integrationswege ein Punkt, in welchem die Funktion zwar eindeutig, aber nicht mehr endlich oder stetig ist, so kann dieser durch entsprechende Wahl des Integrationsweges umgangen werden.

Figur 10.



Figur 11.



Liegt er im innern, so kann er dadurch eingeschlossen werden, dass man ihn mit einem sehr kleinen Kreis einschliesst, dessen Peripherie mit dem Integrationswege verbunden wird. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wo $f(z)$ für $z = a$ unendlich wird, wobei aber zunächst vorausgesetzt werden soll, dass a kein Verzweigungspunkt ist.

Sei also:

$$\int_A f(z)\,dz = \int_A (z - a)\,\frac{f(z)\,dz}{(z - a)}$$

Setzt man:

$$z - a = r\,e^{i\varphi}$$

so wird:

$$\frac{dz}{z - a} = i\,r\,d\varphi$$

also:

$$\int_A f(z)\,dr = i \int_0^{2\pi} [(z - a)\,\psi(z)]\,d\varphi$$

Das Integral ist von r unabhängig, lassen wir r sich der Grenze 0 nähern, so nähert sich z immer mehr dem Punkte a.

Sei also:

$$\text{Lim.}\,[(z-a)\,\varphi(z)] = p \quad \text{für} \quad z = a$$

so wird:

$$\int_{\Delta} f(z)\,dz = 2\pi p i$$

p führt nach Cauchy den Namen Residuum.

Sind innerhalb des Integrationsintervalles mehrere solche Punkte vorhanden, dann ist:

$$\int_{\Delta} f(z)\,dz = 2\pi i \Sigma p_k$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir zeigen, wie die hier angeführten Sätze zur Auswertung bestimmter Integrale benützt werden können.

Sei:

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z}$$

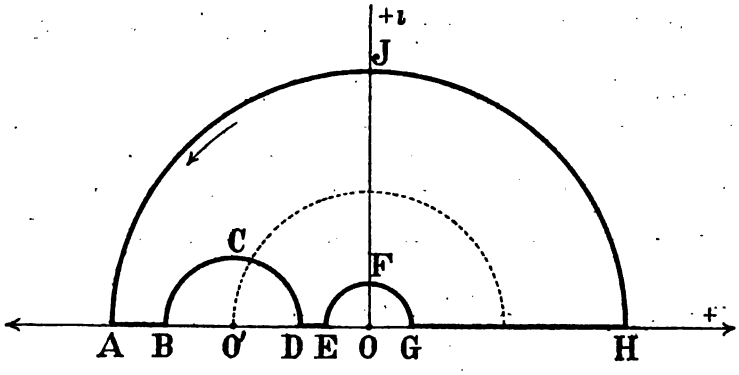
und a eine reelle Zahl.

Hier sind zwei Punkte zu berücksichtigen:

$$(z) = 0 \quad (z) = -1$$

Zum Integrationsweg wählen wir einen Halbkreis:

Figur 12.



Schliesst man die Punkte $0 = 0$ und $0' = -1$ durch die Halbkreise EFG und BCD aus, so wird das Integral über:

$$(J = ABCDEFGHJA) = 0$$

weil dieser Integrationsweg keinen der beiden Punkte einschliesst.

Nun ist:

$$J = (AB) + (BCD) + (DE) + (EFG) + (GH) + (HJA)$$

Ferner wird:

$$(BCD) = -\pi i p_1$$

weil hier bloss der Halbkreis in Betracht gezogen wird.

$$p_1 = \text{Lim.}\,[f(z)\,(z+1)]_{z=-1} = (-1)^{a-1}$$
$$= (\cos\pi + i\sin\pi)_{a=1}$$
$$= [\cos(a-1)\pi + i\sin(a-1)\pi]$$

daher das Integral über:

$$(BCD) = -\pi i\,[\cos(a-1)\pi + i\sin(a-1)\pi]$$

Ferner haben wir das Integral über:

$$(EFG) = 0$$

weil $p_2 = 0$.

Analog ist für $r = 0\,A = \infty$ das Integral über:

$$(HJA) = 0$$

denn:

$$(HJA) = i \int_{\pi}^{0} \frac{r^{a-1} e^{i\varphi(a-1)} r e^{i\varphi}}{r e^{i\varphi} + 1} d\varphi = i \int_{\pi}^{0} \frac{r^{a-1}}{e^{i\varphi} + \frac{1}{r}} e^{i\varphi a} d\varphi$$

wobei wir:

$$z = r e^{i\varphi}$$

gesetzt haben. Doch muss für $r = \infty$ a negativ sein, dann ist das Integral bestimmt gleich 0.

Wir haben also die Bedingung:

$$0 < a < 1$$

Was nun die Integrale über (AB) und (DE) betrifft, so setze man für:

$$x \ldots . - x = x \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$$

daher:

$$(-x)^{a-1} = x^{a-1} [\cos(a-1)\pi + i \sin(a-1)\pi]$$

Sodann ist das Integral über:

$$(AB) + (DE) = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} [\cos(a-1)\pi + i \sin(a-1)\pi] dx$$

Denn wenn die Radien der unendlich kleinen Halbkreise BCD und EFG zusammenfallen, so fallen die Punkte BCD und EFG in die Gerade $0A$ und es fallen sodann auch B mit D, sowie E mit 0 zusammen.

Fassen wir alles bisher Gewonnene zusammen, so wird:

$$0 = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + [\cos(a-1)\pi + i \sin(a-1)\pi] \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx$$
$$- \pi i [\cos(a-1)\pi + i \sin(a-1)\pi]$$

Trennen wir den reellen Teil vom imaginären und betrachten die beiden Integrale als Unbekannte, so lassen sich diese aus den gewonnenen Gleichungen berechnen und man hat:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(a-1)\pi} \qquad 0 < a < 1$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{tg}(a-1)\pi}$$

Wir haben bisher angenommen, dass der Integrationsweg sich nur einmal um einen kritischen Punkt windet. Diese Voraussetzung lassen wir fallen.

Wir nehmen zunächst an, der Integrationsweg sei $(ABCDEFA)$, wobei also der kritische Punkt a zweimal umkreist wird (siehe Figur 13).

Ziehen wir die Wege AE und AD, dann erhält der Raum ADE den Verzweigungspunkt nicht mehr. Für diesen Raum gilt der Satz:

$$(DE) + (EA) + (AD) = 0$$

daher:

$$(DE) = (AE) + (DA)$$

Sodann ist:

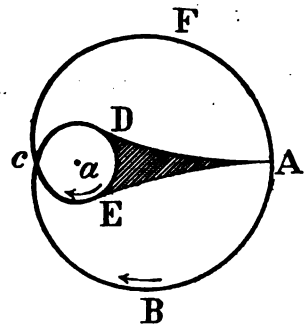
$$(ABCDEFA) = (ABCDA) + (AECFA)$$

Die Integrale über die beiden letzten Wege sind synektisch. Jedes von ihnen besitzt den Wert $2\pi ip$, daher hat man:

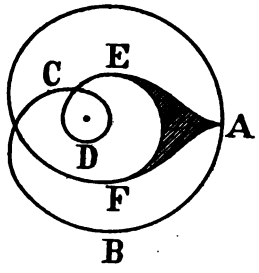
$$(ABCDEFA) = 4\pi ip$$

Aehnlich hat man für eine dreimalige Umkreisung (siehe Figur 14).

Figur 13.



Figur 14.



$$(ABCDEFGA) = (ABCDEA) + (AFGA)$$
$$= 4p\pi i + 2p\pi i = 6p\pi i$$

und allgemein für eine $n$malige Umkreisung:

$$\int = \pm 2n\pi ip$$

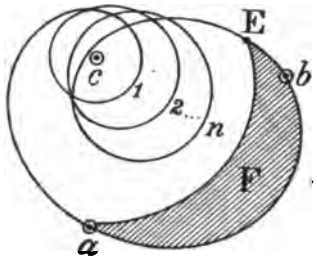
wobei natürlich nur ein einziger Verzweigungspunkt angenommen wird.

Nehmen wir nun an, wir hätten das Integral:

$$\int_a^b f(z)\,dz$$

welches in $z = c$ einen Unstetigkeitspunkt besitzt. Die Funktion $f(z)$ sei eine $n$deutige (siehe Figur 15).

Figur 15.



Dann geht der Wert z von a nach b auf dem Wege:

$$(a\,1\,2 \ldots n\,b)$$

wobei der Punkt c $n$mal umkreist wird.

Zeichnen wir einen neuen Weg $(aFEb)$, so wird nach dem früheren das Integral über:

$$(a\,1\,2 \ldots n\,EFa) = \pm 2npi$$

Da die Fläche $(aFEb)$ keinen kritischen Punkt einschliesst, so ist:

$$(aFE) = (bE) + (ab)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}(a\,1\,2\ldots n\,Eb) &= (a\,1\,2\ldots n\,E) + (Eb)\\ &= (a\,1\,2\ldots nE) + (ab) + (EFa)\\ &= (a\,1\,2\ldots n\,EFa) + (ab)\end{aligned}$$

also das Integral:

$$\int_a^b f(z)\,dz = (ab) \pm 2npi$$

Nun bedeutet (ab) nichts anderes als dasselbe Integral mit Rücksicht auf die einfachste Form des Ueberganges. Allgemein haben wir also:

$$\int_a^b f(z)\,dz = \left(\int_a^b f(z)dz\right) \pm 2n\pi ip$$

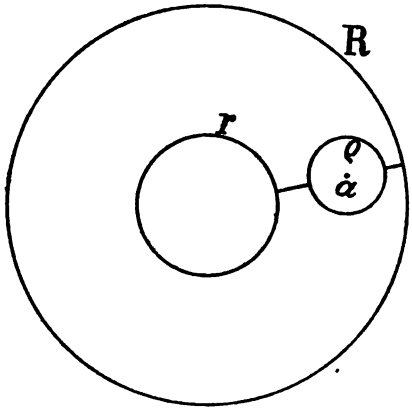
So wird z. B.:

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \log z \pm 2n\pi i$$

da hier $p = 1$. Es gilt als Regel, dass bei $2n\pi ip$ das Plus- oder Minuszeichen zu nehmen ist, je nachdem der Integrationsweg in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen wird oder umgekehrt.

Wir wollen diese Sätze zu wichtigen Folgerungen benützen:

Figur 16.



Nehmen wir an, eine Funktion $f(z)$ sei in dem durch die beiden Kreise R und r um Nullpunkt herum begrenzten Ring eindeutig und stetig. Sodann wird es auch die Funktion:

$$\frac{z-a}{f(z)}$$

jedoch mit Ausnahme des Punktes a.

Nach unserem Fundamentalsatze für synektische Funktionen ist also:

$$\int_R \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_r \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \int_\varrho \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

wobei sich die Integrationen über die durch die Radien angezeigten Kreise erstrecken. Betrachten wir nun die Integrale einzeln, so wird, wenn:

$$z = a + \varrho e^{i\varphi}$$

gesetzt wird:

$$\int_\varrho \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} f(a+\varrho e^{i\varphi})\,d\varphi$$

also für unendlich kleines ϱ:

$$\int_\varrho \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi f(a)$$

In:
$$\int_R \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$
ist offenbar:
$$(a) < (R)$$
also können wir schreiben:
$$\int_R \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_R f(z)\,\frac{dz}{z}\,\Sigma\frac{\alpha^x}{z^x}$$
analog wird:
$$\int_r \frac{f(z)}{z-a}\,dz = -\int_r f(z)\,\frac{dz}{z}\,\Sigma\frac{z_x}{\alpha^x}$$
demnach wird:
$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\left(\Sigma\alpha^x \int_R \frac{f(z)}{z^x}\,dz + \Sigma\frac{1}{\alpha^x}\int_r f(z)\cdot z^x\,dz\right)$$
dabei ist:
$$\int_R \frac{f(z)}{z^x}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})}{R^x e^{i\varphi x}}\,d\varphi$$
$$\int_r f(z)z^x\,dz = \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,r^x e^{ix\varphi}\,d\varphi$$

Nehmen wir $r = 0$, d. h. den Konvergenzbereich für z, durch den Kreis mit dem Radius R begrenzt an, so wird:
$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\,\Sigma\alpha^x \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})}{R^x e^{i\varphi x}}\,d\varphi$$

Vergleicht man diese Entwickelung mit jener von Maclaurin, so folgt:
$$f^{(x)}(0) = \frac{x!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})}{R^x e^{i\varphi x}}\,d\varphi$$

Wir können noch zeigen, wie die Fourierschen Reihen mit unseren Entwickelungen zusammenhängen. Setzen wir:
$$b = e^{\frac{2\pi i}{\Omega}a}$$
dann wird:
$$f(a) = f\left(\frac{\Omega}{2\pi i}\log b\right) = \varphi(b)$$
oder allgemeiner, wegen der Vieldeutigkeit von $\log b$:
$$f(a) = f\left(\frac{\Omega}{2\pi i}\log b + x\,\Omega\right)$$
wobei x eine beliebige ganze Zahl ist. Soll diese Gleichung bestehen, so muss:
$$f(a) = f(a + \Omega)$$
d. h. die Funktion a eine Periode Ω haben. Also nur für solche Funktionen gelten die nachstehenden Ueberlegungen. Dann wird aber $\varphi(b)$ solange stetig und eindeutig, solange es $f(a)$ ist. Sei nun $f(a)$ stetig und eindeutig innerhalb des mit dem Radius R bezeichneten Kreises. Suchen wir nun die Grenzen von b. Es war:
$$b = e^{\frac{2\pi i}{\Omega}a}$$

Setzen wir also:

$$a = Re^{i\varphi}$$

so wird:

$$b = e^{-\frac{2\pi}{\Omega}R(\sin\varphi - i\cos\varphi)}$$

der Modul von b ist also:

$$e^{-\frac{2\pi}{\Omega}R\sin\varphi}$$

und seine Grenzen sind:

$$e^{-\frac{2\pi}{\Omega}R} < r < e^{+\frac{2\pi}{\Omega}R}$$

demzufolge bleibt $\varphi(b)$ eindeutig und stetig innerhalb eines Ringes, dessen Radien durch die soeben angezeigten Werte gegeben sind.

Wir haben also:

$$\varphi(b) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_0^\infty b^n \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(re^{i\varphi})}{r^n e^{ni\varphi}} d\varphi + \sum_1^\infty \frac{1}{b^n}\int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\varphi}) r^n e^{i\varphi n} d\varphi\right)$$

Nimmt man $r = 0$ und setzt:

$$\frac{\Omega\varphi}{2\pi} = \lambda$$

so folgt:

$$f(a) = \frac{1}{\Omega}\int_0^\Omega f(\lambda)\, d\lambda \left[1 + 2\sum_1^\infty \cos\frac{2n\pi}{\Omega}(a-\lambda)\right]$$

dieses ist die bekannte Fouriersche Formel.

Gehen wir von bekannten Funktionen aus, so gibt uns also die funktionaltheoretische Ableitung Mittel an die Hand, den Konvergenzradius der Reihenentwicklung zu bestimmen.

§ 5. Fortsetzung der Funktionentheorie nach Riemanns Anschauung.

Wir behaupten: Wenn eine einwertige Funktion nie unendlich wird, so ist sie eine konstante.

Um diesen Satz zu erweisen, benützen wir die Gleichung:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{z-t}$$

Die Integration soll auf den Umfang eines Kreises mit dem Radius r bezogen werden. Setzen wir also:

$$z = re^{i\varphi}$$

so wird:

$$\frac{dz}{z} = i\, d\varphi$$

also:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\varphi} f(re^{i\varphi})}{re^{i\varphi} - t} d\varphi$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\varphi})\, d\varphi}{1 - \frac{re^{i\varphi}}{t}}$$

da die Funktion nie unendlich wird und einwertig ist, so kann r beliebig gross genommen werden. Sei also $r = \infty$, dann wird:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

Da nun das Integral von t nicht abhängt, so muss $f(t)$ eine Konstante sein. Daraus folgt, dass eine einwertige Funktion wenigstens für irgend einen Wert der Variablen unendlich gross sein muss. Sie muss aber auch Null werden. Denn wäre $\varphi(z)$ nicht 0, so könnte:

$$\frac{1}{\varphi(z)}$$

nicht ∞ werden, also wäre eine Konstante und demzufolge auch $\varphi(z)$, was wider die Voraussetzung ist.

Weiter können wir behaupten, dass eine einwertige Funktion mindestens einmal irgend einen vorgeschriebenen Wert annehmen muss. Denn wäre nicht wenigstens einmal:

$$\varphi(z) = k$$

so wäre:

$$\varphi(z) - k$$

nie 0, also eine Konstante, was wider die Voraussetzung ist.

Wir behaupten: Eine einwertige Funktion ist auf eine Konstante bestimmt, sobald für jeden Unstetigkeitspunkt eine Funktion gegeben ist, die in diesem Punkt genau so unendlich wird, wie die gegebene Funktion, sonst aber endlich und stetig bleibt. Sei $f(z)$ die gegebene Funktion und

$$a_1 a_2 \cdots a_n$$

die Unstetigkeitspunkte, sowie:

$$\varphi_1(z)\,\varphi_2(z) \cdots \varphi_n(z)$$

Funktionen, die sonst endlich und stetig nur an diesen Punkten ∞ wie die Funktion selbst werden.

Man kann schreiben:

$$f(z) = \varphi_1(z) + \psi_1(z)$$

für $z = a_1$ wird $f(z)$ ebenso ∞ gross wie $\varphi_1(z)$. Da nun $\varphi_1(z)$ für $z = a_2$ endlich bleibt, so muss $\psi(z)$ hier unendlich werden, also wird analog:

$$\psi_1(z) = \varphi_2(z) + \psi_2(z)$$

So fortfahrend gelangen wir bis:

$$\psi_{n-1}(z) = \varphi_n(z) + \psi_n(z)$$

wo $\psi_n(z)$ nirgends mehr ∞ gross wird, also eine Konstante ist. Sei diese C, so wird:

$$f(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z) + \cdots \quad \varphi_n(z) + C$$

Wir geben ein Beispiel aus der Theorie der Gammafunktion.

Es soll eine Funktion gefunden werden, welche für sämtliche reelle, ganze, negative Werte $-(m+1)$ des Argumentes $z = x + iy$ unendlich gross wird, wie:

$$\varphi_m(z) = \frac{(-1)^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \cdot \frac{1}{z+m+1}$$

und für $x = n + \infty$ unendlich gross wird, wie:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\,n$$

dagegen für $x = -\infty$ gleich Null wird. Ferner soll noch festgesetzt werden, dass für $z = 0$ der Wert der Funktion $= 1$ sein soll. Dadurch wird die additive Konstante C bestimmt.

Wir haben:

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{m=0}^{m=\infty} \varphi_m(z) + C$$

$f_1(z)$ soll für jedes endliche z endlich dagegen für:

$$z = +\infty + iy$$

den Wert ∞ annehmen.

Wir schreiben, indem wir die Brüche zusammenziehen:

$$f(z) = \text{Lim.} \left[\frac{f_2(z,k)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+k)} \right]_{k=\infty}$$

für $z = 0$ soll $f(z) = 1$ werden, also kann man:

$$f_2(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k f_3(z,k)$$

setzen. Dadurch wird:

$$f(z) = \text{Lim.} \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{(z+1)(z+2)\cdots(z+k)} f_3(z,k) \right]$$

Nun soll für $z = -m-1$ die Funktion gleich sein:

$$\frac{(-1)^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \cdot \frac{1}{z+m+1}$$

Wir haben also:

$$\text{Lim.} \frac{k! f_3(z,k)}{(-1)^m m! k-m-1!} = \frac{(-1)^m}{m!}$$

oder:

$$\text{Lim.} [f_3(z,k) \cdot (k-m)(k-m+1)\cdots(k-1)k] = 1$$

Wir haben also:

$$\text{Lim.} f_3(z,k) = k^{-m-1}$$

oder allgemein:

$$\text{Lim.} f_3(z,k) = k^a$$

so dass also:

$$f(z) = \text{Lim.} \left[\frac{k! k^a}{(z+1)\cdots(z+k)} f_4(z,k) \right]$$

wird. Die soeben gewonnene Funktion besitzt alle Eigenschaften, nur noch soll für $z = \infty = n$, $f(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ sein. Hieraus folgt, dass:

$$f_4(z,k) = 1$$

genommen werden musss, denn $f_4(zk)$ ist eine einwertige Funktion, die nie unendlich wird, also eine Konstante. Also ist:

$$f(z) = \text{Lim.} \left[\frac{k! k^z}{(z+1)\cdots(z+k)} \right]_{k=\infty}$$

und dieser Ausdruck gilt für alle imaginäre Werte von z. Es ist dies der bekannte Ausdruck für die Gammafunktion, den wir rein theoretisch abgeleitet haben.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1308. Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Einführung in die Funktionentheorie.
Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.
Forts. v. Heft 1307. — Seite 33—48.
Mit 5 Figuren.

Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Einführung in die Funktionentheorie.

Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.

Bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1307. — Seite 33—48. Mit 5 Figuren.

Inhalt:

Rationale Funktionen. — Theorie der Reihen. — Die Reihenfortsetzung.

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer**, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

§ 6. Rationale Funktionen.

Eine rationale Funktion entsteht durch in endlicher Anzahl wiederholte Anwendung der elementaren Rechnungsarten auf die Zahlengrössen:

$$a, b, c \cdots \qquad x_1 x_2 x_3 \cdots$$

Nachdem nun immer erreicht werden kann, dass die Division entweder gar nicht oder nur einmal im Resultate auftritt, so hat man zwei grosse Gruppen zu unterscheiden: Die ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen.

Wir haben nun folgende Theoreme:

I. Zwei ganze Funktionen einer Variablen sind gleich, wenn sie auf die Normalform gebracht, gleiche Koëffizienten haben.

II. Zwei ganze Funktionen von nicht höherem Grade als n sind gleich, wenn sie für $(n+1)$ Werte, gleiche Werte annehmen.

Diese Sätze ergeben sich unmittelbar aus dem Satze, dass eine ganze Funktion $n$ten Grades nicht für $n+1$ Werte von x verschwinden kann, ohne dass sämtliche Koëffizienten gleich 0 wären.

III. Eine jede ganze Funktion vom $n$ten Grade, lässt sich in n Faktoren ersten Grades zerlegen.

Dieses ist bewiesen, wenn es feststeht, dass die ganze Funktion mindestens für einen Wert von x verschwinden muss. Um dieses zu erweisen schicken wir drei Sätze voraus:

α) Jede der Gleichungen:

$$x^m - 1 = 0, \quad x^m + 1 = 0, \quad x^m + i = 0, \quad x^m - i = 0$$

hat stets eine angebbare Wurzel. Der Beweis gehört in die algebraische Analysis.

β) Es sei für einen bestimmten Wert von $x = a$, $f(a)$ von 0 verschieden, dann ist es immer möglich, andere Werte von x zu finden, für welche:

$$[f(x)] < [f(a)]$$

und

$$|x - a| < \delta$$

wird, wobei δ eine beliebige, noch so kleine Grösse bezeichnet.

Denn seien $c_0 \cdots c_r$ reelle Koëffizienten und ξ eine reelle Variable, und sei die Funktion:

$$f(\xi) = c_0 \xi^m + c_1 \xi^{m+1} + \cdots \quad c_r \xi^{m+r}$$

gegeben. Dann lässt sich zeigen, dass für einen bestimmten Wert von ξ der ganze Ausdruck das Vorzeichen des ersten Gliedes erhält.

Denn man hat:

$$f(\xi) = c_0 \xi^m \left(1 + \frac{c_1}{c_0}\xi + \frac{c_2}{c_0}\xi^2 + \cdots \quad \frac{c_r}{c_2}\xi^r\right)$$

Sei nun k grösser als jede der Grössen:

$$\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_0} \cdots \quad \frac{c_r}{c_0}$$

so wird:

$$f(\xi) \leqq c_0 \xi^m [1 + k\xi(1 + \xi + \cdots \quad \xi^{r-1})]$$

$$\leqq c_0 \xi^m \left(1 + k\xi \cdot \frac{\xi^r - 1}{\xi - 1}\right)$$

Sei nun $\delta < 1$ und positiv, dabei so klein, als man will; setzt man:

$$\xi < \frac{\delta}{k+\delta}$$

so wird:

$$k\frac{\xi}{1-\xi} < \delta$$

also so klein, als man will. Demnach gibt es einen Wert von ξ, für welchen $f(\xi)$ das Vorzeichen des Gliedes $c_0\xi^m$ erhält.

Sei nun $x = a + h$, wobei a und h komplexe Grössen sind, so wird:

$$f(x) = A_0 + A_m h^m + A_{m+1}h^{m+1} + \cdots$$

dabei ist $A_0 = f(a) \gtrless 0$ nach der Voraussetzung. Setzt man allgemein:

$$\frac{A_m}{A_0} = \alpha_m + i\beta_m$$

so folgt:

$$\begin{aligned}[f(x)]^2 &= (A_0)^2 \cdot \left\{[1 + (\alpha_m + i\beta_m)h^m + \cdots]\right\}^2 \\ &= (A_0)^2 \cdot \left\{[(1 + \alpha_m h^m + \cdots)^2 + (\beta_m h^m + \cdots)^2]\right\} \\ &= (A_0)^2 \cdot (1 + 2\alpha_m h^m + \cdots)\end{aligned}$$

Nun können drei Fälle eintreten:

α) α_m ist negativ. Dann kann nach dem früher bewiesenen Satze h^m immer so klein gewählt werden, dass der Klammerausdruck gleich wird $1 - \delta$, dann ist aber:

$$|f(x)| < f(a)$$

β) Ist $\alpha_m > 0$, dann setze man:

$$h = (-1)^{\frac{1}{m}}\xi$$

wobei ξ positiv ist und man erhält:

$$|f(x)|^2 = |A_0|^2\,|[1 + (-\alpha_m - \beta_m i)\xi^m + \cdots]|^2 = |A_0|^2\,|1 - 2\alpha_m\xi^m + \cdots|^2$$

wir haben also denselben Fall wie früher.

γ) Ist $\alpha_m = 0$, so muss $\beta_m \gtrless 0$ sein, weil $A_m \gtrless 0$ ist. Wir haben also:

1) $\beta_m > 0$, dann setzen wir $h = \sqrt[m]{i}\cdot\xi$

2) $\beta_m < 0$, „ „ „ $h = \sqrt[m]{-i}\cdot\xi$

wobei ξ wie früher positiv angenommen wird.

Damit ist nachgewiesen, dass ich für jedes gegebene a ein x so finden kann, dass:

$$|f(a)| > |f(x)|$$

Man kann also $f(x)$ immer kleiner und kleiner machen. Cauchy, der diesen Beweis gegeben, sagt: Notwendig muss einmal $f(x) = 0$ werden.

Dieses muss aber noch bewiesen werden.

Wir haben zu zeigen: dass $f(x)$ ein Minimum hat und ferner: dass dasselbe wirklich erreicht wird.

Denn wenn gezeigt wird, dass $f(x)$ unter eine sich einer Grenze nähert, ist noch nicht bewiesen, dass diese Grenze wirklich erreicht wird. So hat z. B. der Abstand zwischen einem Hyperbelpunkte und der Asymptote zur unteren Grenze 0, diese wird aber nie erreicht (vergleiche Seite 10, § 1).

Wir werden beweisen:

$$|f(x)|$$

hat eine untere Grenze ξ_0. Diese ist 0. Denn wenn sie es nicht wäre, so könnten in jeder Nähe des angeblichen Minimums andere x-Werte derart bestimmt werden, dass:

$$|f(x)| \gtrless \xi_0$$

dann wäre aber ξ_0 nicht Minimum.

Um das erstere zu erweisen, erinnern wir an den früher bewiesenen Satz: Wenn eine reelle Variable stets grösser ist, als eine angebbare Grösse, so hat sie eine bestimmte untere Grenze.

Sei nun:

$$f(x) = \varphi(\xi\eta) + i\psi(\xi\eta)$$

also:

$$\delta = |f(x)^2| = \varphi(\xi\eta)^2 + \psi(\eta\xi)^2$$

so können wir behaupten, dass δ stets grösser ist als eine angebbare Grösse — nämlich 0, denn δ ist immer positiv — demnach hat δ eine untere Grenze δ_0.

Mit anderen Worten, dass wie klein man auch δ nehmen mag, dennoch mindestens ein Wert von δ in dem Intervall $\delta_0 \cdots \delta_0 + \delta$ liegen muss.

Aber dieser Wert $\delta_0 = 0$ gehört zu den definierten. Denn wenn nicht:

$$\delta_0 = \varphi(\xi_0\eta_0)^2 + \psi(\xi_0\eta_0)^2$$

wäre, so müsste:

$$\delta' = \varphi(\xi_0\eta_0)^2 + \psi(\xi_0\eta_0)^2$$

sein. Aendern sich ξ_0 und η_0, so ändert sich auch δ'; wir haben also:

$$\delta'' = \varphi(\xi_0 + \varepsilon,\ \eta_0 + \varepsilon')^2 + \psi(\xi_0 + \varepsilon,\ \eta_0 + \varepsilon')^2$$

Da nun φ und ψ rationale Funktionen sind, so kann:

$$|\delta'' - \delta'|$$

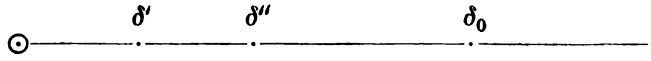
immer durch geeignete Wahl von ε, ε' kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine angebbare Grösse. Man kann also:

$$|\delta'' - \delta'| < \frac{1}{2}|\delta_0 - \delta'|$$

machen. Also auch:

$$|\delta_0 - \delta''| > \frac{1}{2}|\delta_0 - \delta'|$$

wie aus nachfolgender Figur ersichtlich:



Aus der letzten Gleichung folgt aber, dass $\delta_0 - \delta''$ nicht kleiner gemacht werden kann, als jede beliebige Grösse, selbst wenn man $\xi\eta$ noch so nahe an $\xi_0\eta_0$ nimmt. Dieses steht im Widerspruche mit der Voraussetzung, der zufolge in jeder Nähe von δ_0 Werte existieren müssen (hier δ''), die zu den definierten gehören.

Es muss daher notwendig:

$$|\delta^0 - \delta'| = 0$$

also:

$$\delta_0 = \delta'$$

sein.

§ 7. Theorie der Reihen.

Dirichlet bemerkte 1837 (Abhandl. der Berl. Akademie), dass die Summe gewisser convergenten Reihen nicht unabhängig von der Anordnung der Glieder ist. Als Beispiel führt er die Reihe:

$$\tau = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

welche sich auch wie folgt ordnen lässt:

$$s = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Es zeigt sich, dass:

$$s = \frac{3}{2}\tau$$

Riemann hat weiter gezeigt, dass man der obigen Reihe durch Verstellung der Glieder einen beliebigen Wert geben kann. Riemanns Vorschrift lautet: Sei S die verlangte Summe. Man nehme so lange positive Glieder, bis ihre Summe grösser wird als S und sodann so lange negative, bis die Summe kleiner wird als S. Dann wird die Abweichung der so gebildeten Reihe von S weniger betragen, als der Wert des dem letzten Zeichenwechsel vorausgehenden Gliedes. Da die Glieder mit wachsendem Index zuletzt so klein werden, als man will, so gilt dieses auch vom Unterschied der Reihe und der Grösse S.

Wollten wir z. B. in der obigen Reihe die Glieder so umstellen, dass ihre Summe gleich wird 1, so würden wir bilden:

$$1 + \frac{1}{3} > 1 > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} > 1 > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \text{ u. s. w.}$$

Derartige Reihen wollen wir bedingt konvergente nennen, zum Unterschiede von unbedingt (d. h. bei jeder Anordnung der Glieder gegen dieselbe Summe) konvergierenden.

Das Verhalten obiger Reihe wird sofort klar, wenn man sie wie folgt schreibt:

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

Beide Reihen sind divergent und demnach ist die Reihe von der Form:

$$\infty - \infty$$

d. h. unbestimmt. Wir entnehmen diesen Ueberlegungen aber auch die Thatsache, dass eine Reihe, die nur positive Glieder enthält, nicht bedingt konvergent sein kann.

Cauchy hatte behauptet, dass eine Reihe, deren Glieder stetige Funktionen eines Argumentes sind, allemal selbst eine stetige Funktion darstelle. Abel (Crelle I) zeigte, dass es Ausnahmen gibt, indem er auf die (allererste) Sinusreihe (von Euler: Nov. Com. Petrop entwickelt) hinwies:

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots$$

die trotz der Stetigkeit ihrer Glieder, für $\varphi = (2m+1)\pi$ unstetig wird. Die Bedingung der Stetigkeit für alle Reihen hat Stockes, vor allem aber

Seidel (1877, Bayerische Akademie) in der gleichmässigen Konvergenz erkannt.

Nehmen wir eine allgemeine Reihe:

$$f(x) = \sum_{n\,0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

Ist es möglich, bei Annahme einer beliebig kleinen Grösse ε eine Anzahl von m ersten Gliedern so abzusondern, dass der Wert des Restes:

$$\sum_{m-1}^{\infty} \varphi_n(x) < \varepsilon$$

für alle Werte von x, die im Konvergenzbezirk liegen, so ist $f(x)$ in diesem Konvergenzbezirk gleichmässig konvergent. Im Falle der gleichmässigen Konvergenz ist obiger Cauchyscher Satz richtig.

Wir wollen die allgemeine Regel auf ein specielles Beispiel anwenden. Sei:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots \alpha_{m-1} x^{m-1} + \alpha_m x^m + \alpha_{m+1} x^{m+1} + \cdots$$

Kann für jede noch so kleine vorgegebene Grösse ε ein endliches m so gefunden werden, dass:

$$\alpha_m x^m + \alpha_{m+1} x^{m+1} + \cdots < \varepsilon$$

für alle Werte des Konvergenzbereiches von x, so ist die Reihe für $f(x)$ gleichmässig konvergent. Setzt man:

$$F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_{m-1} x^{m-1}$$

so wird:

$$F(x+\delta) = f(x)$$

gesetzt werden können und man hat:

$$F(x+\delta) - F(x) < \varepsilon$$

d. h. $F(x)$ stellt eine stetige Funktion dar und wir haben:

$$\delta F'(x) + \frac{\delta^2}{1 \cdot 2} F''(x) + \cdots = \alpha_m x^m + \alpha_{m+1} x^{m+1} + \cdots < \varepsilon$$

Für die Eulersche Reihe, die wir oben angeführt haben, ist:

$$f(x+\delta) - f(x) = \delta(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots)$$

also kann, da für $x = \pm\pi$ die Klammerreihe divergent wird, nicht immer:

$$f(x+\delta) - f(x) < \varepsilon$$

gemacht werden. Die Reihe ist also nicht stetig und konvergiert demnach nicht gleichmässig. Das lässt sich auch direkt zeigen, indem man für $x = \pm\pi$ nie eine Anzahl von m ersten Gliedern so absondern kann, dass der Rest kleiner wäre, als jede noch so kleine gegebene Grösse ε.

Der Begriff der gleichmässigen Konvergenz ist von der grössten Wichtigkeit. Cauchy hat nämlich behauptet, dass das Integral einer unendlichen Reihe von Gliedern gleich dem Integral der Summe ist, dass also:

$$\int (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots) = \int u_0 + \int u_1 + \int u_2 + \cdots$$

Man kann zeigen, dass dieses nur dann der Fall sein wird, wenn die Reihe:

$$u_0 + u_1 + u_2 \cdots$$

gleichmässig konvergiert. Dieses Theorem ist äusserst wichtig, denn man hat so den Beweis geführt, dass die Entwicklung der Fourierschen Reihe nur in einer Weise möglich ist. Auch Jacobis Satz von der Darstellbarkeit der

Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch bestimmte Integrale, wurde auf diese Art bewiesen. In der mathematischen Physik wird von diesem Satze auch oft Gebrauch gemacht.

In früherer Zeit liess man auch die divergenten Reihen als formelle Gebilde gelten. Wir schliessen dieselben aus. Denn sie stellen keine bestimmten Grössen dar. Betrachtet man z. B. die aus:

$$\frac{1}{1+x}$$

für $x = 2$ hervorgehende Reihe, so kann sie wie folgt transformiert werden:

$$\begin{aligned} & 1-2+4-8+16-32+64-\cdots \\ &= 1+(-2+4)+(-8+16)+(-32+64)+\cdots \\ &= 1+2+8+32+64+\cdots \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} &= (1-2)+(4-8)+(16-32)+(64-128)+\cdots \\ &= -1-4-16-64-\cdots \end{aligned}$$

Es liefert also ein doppelter berechtigter Vorgang, einmal einen unendlich grossen positiven, das anderemal einen unendlich grossen negativen Wert für denselben Ausdruck.

Der erste, der die gleichmässige Konvergenz, ohne sie zu nennen, in den Kreis der mathematischen Betrachtungen zog, war Bolzano. Wir entnehmen seiner Schrift folgende Darstellung:

Nehmen wir $a = 1$ und e positiv an und setzen als symbolische Gleichung:

$$S = 1+e+e^2+\cdots \text{ in inf.}$$

so ist soviel gewiss, dass S eine positive, gleichviel ob endliche oder unendliche Grösse bezeichnet.

Es ist aber auch für jeden beliebigen ganzzähligen Wert von n:

$$S = 1+e+e^2+\cdots+e^{n-1}+e^n+e^{n+1}+\cdots$$

oder auch:

$$S = \frac{1-e^n}{1-e}+e^n+e^{n-1}+\cdots$$

wofür wir auch:

$$S = \frac{1-e^n}{1-e}+p_1$$

schreiben können, wobei wir wenigstens wissen, dass p_1 eine von e und n abhängige nennbare oder unnennbare, jedenfalls aber positive Grösse bezeichnet. Wir können auch schreiben:

$$p_1 = e^n(1+e+e^2+\cdots)$$

Hier hat nun die aus ∞ vielen Gliedern bestehende Summe in den Klammern auf der rechten Seite ganz das Aussehen der symbolischen Gleichung S, ist aber gleichwohl mit ihr nicht für einerlei zu halten. Indem die Menge der Summanden zwar beidemal ∞, aber nicht gleich ist, denn p_1 hat unstreitig um n Glieder weniger als S. Wir können also nun:

$$p_1 = e^n(S-p_2)$$

setzen, wobei wieder p_2 jedenfalls eine von n abhängige, stets positive Grösse ist. Sonach erhalten wir:

$$S = \frac{1-e^n}{1-e}+e^n(S-p_2)$$

oder:

$$S(1-e^n) = \frac{1-e^n}{1-e} - e^n p_2$$

d. h.:

$$S = \frac{1}{1-e} - \frac{e^n}{1-e^n} p_2$$

Es wird also:

$$\frac{-e^n}{1-e^n} + p_1 = -\frac{e^n}{1-e^n} \cdot p_2$$

oder:

$$p_1 + \frac{e^n}{1-e^n} p_2 = \frac{e^n}{1-e^n}$$

woraus wir sehen, dass, wenn n beliebig gross genommen wird, der Wert:

$$\frac{e^n}{1-e^n}$$

unter jede beliebige, noch so kleine Grösse $\frac{1}{N}$ herabrücken, auch eine jede der Grössen p_1 und p_2 für sich unter jeden beliebigen Wert herabsinken müsse.

S hat daher zur Summe die Grösse:

$$\frac{1}{1-e}$$

Man könnte noch einwenden, dass in der Gleichung:

$$p_1 + \frac{e^n}{1-e^n} p_2 = \frac{e^n}{1-e^n}$$

p_2 einen ∞ Wert annehmen könnte. Aber aus:

$$p_1 = e^n (S - p_2)$$

folgt, dass $p_1 S$ und p_2, sowie e wesentlich positiv sind.

$$S > p_2$$

also wird:

$$\frac{1-e^n}{1-e} + p_1 > p_2$$

woraus folgt, dass auch p_2 unter einer bestimmten endlichen Grenze bleiben muss.

Die Konvergenz dieser Reihe musste streng erwiesen werden, weil sie zur Grundlage so mancher nachstehenden Entwickelungen gebraucht wird.

Wir können nun zeigen, dass auch ihre Ableitung, d. h. die Reihe:

$$S' = 1 + e + 2e^2 + 3e^3 + 4e^4 \cdots$$

konvergiert. Dabei wird e wesentlich positiv vorausgesetzt (Modul der komplexen Grösse). Wird:

$$S = 1 + e + e^2 + e^3 \cdots$$

gesetzt, so folgt:

$$S' = S + e(S - p_1) + e_2(s - p_2) + \cdots$$

oder:

$$S' = S^2 - (ep_1 + e^2 p_2 + \cdots)$$

d. h. da der Klammerausdruck, der eine wesentlich positive Grösse darstellt:

$$S^2 \geq S'$$

da nun S eine endliche Summe hat, muss auch S' eine solche haben. Wir wollen noch auf einen Satz aufmerksam machen:

Eine Reihe konvergiert, wenn die Reihe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder konvergiert; **man kann aber nicht umgekehrt schliessen.**

Denn sei:

$$S = (a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + \cdots$$

die gegebene Reihe, und konvergiert die Reihe:

$$|S| = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \cdots$$

so wird auch S:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + i(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots)$$

konvergieren, wenn gezeigt wird, dass jede der Reihen:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$
$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

konvergiert. Nun ist aber allgemein:

$$\sqrt{b_k^2 + a_k^2} \geqq \sqrt{a_k^2} = |a_k| = a_k$$
$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \geqq \sqrt{b_k^2} = |b_k| = b_k$$

also:

$$\sqrt{a_0^2 + b_0^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \cdots > a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

und zugleich:

$$\sqrt{a_0^2 + b_0^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \cdots \geqq b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

woraus die Konvergenz unmittelbar folgt. Dass nicht umgekehrt geschlossen werden darf, folgt aus:

$$a + b \geqq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Schliesslich betrachten wir noch die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Da allgemein:

$$\frac{r+1}{n} > \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots \frac{1}{n+r}\right) > \frac{r+1}{n+r}$$

so folgt für ein endliches n und Lim. $r = \infty$:

$$\infty > \text{Lim.}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots \frac{1}{n+r}\right) > 1$$

also kann man nie ein endliches n angeben, für welches der Rest der Reihe:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots < \varepsilon$$

wo ε eine beliebig kleine vorgegebene Zahl ist. Die Reihe ist demnach divergent.

Wenden wir uns zu den Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty a_\nu x^\nu$$

Für diese gilt der Fundamentalsatz:

Wenn für x, wo $|x| = x_0$ die Beziehung:

$$|a_\nu x^\nu| < g$$

wo g eine angebbare endliche Grösse ist, existiert, dann ist für jedes:

$$|x| = \xi, \quad \xi < x_0$$

die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ gleichmässig konvergent.

Denn sei:

$$|x| = \xi, \quad \xi < x_0$$

so wird:

$$|\alpha_\nu x^\nu| < g\left(\frac{\xi}{x_0}\right)^\nu$$

also:

$$\mathfrak{P}(x) < g\left(\frac{\xi}{x_0}\right)\frac{1}{1-\frac{\xi}{x_0}}$$

Nun kann ich vom $m$ten Gliede an den Rest:

$$R_m < g\left(\frac{\xi}{x_0}\right)\frac{1}{1-\frac{\xi}{x_0}}$$

kleiner machen als jede angebbare Grösse, wenn ich nur m dementsprechend wähle, da:

$$\left|\frac{\xi}{x_0}\right| < 1.$$

Wir beweisen ferner: Konvergiert die Reihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

innerhalb eines Intervalles $\pm a$ gleichmässig, so konvergieren alle Derivierten dieser Reihe ebenfalls gleichmässig innerhalb desselben Intervalles.

Denn ist:

$$|x| < a$$

so wird:

$$|n\alpha_n x^{n-1}| = \left|n\alpha_n a^{n-1}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\right| < \frac{ng}{a}\left|\frac{x}{a}\right|^{n-1}$$

Also wird:

$$R_n < g\,\frac{n}{a}\left|\frac{x}{a}\right|^{n-1}\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a}\right|^{n-1}}$$

da:

$$\left|\frac{x}{a}\right| < 1$$

so wird:

$$\text{Lim. } R_n = 0 \text{ für Lim. } n = \infty.$$

Wir haben nämlich:

$$\text{Lim. } n\left|\frac{x}{a}\right|^{n-1} < \frac{1}{\varepsilon}\,\text{Lim.}\left(\left|\frac{x}{n}\right|^n - \left|\frac{x}{n} - \varepsilon\right|^n\right)$$

denn es ist allgemein:

$$n\delta^{n-1} < \frac{\delta^n - (\delta-\varepsilon)^n}{\delta - (\delta-\varepsilon)} = \delta^{n-1} + \delta^{n-2}(\delta-\varepsilon) + \cdots (\delta-\varepsilon)^{n-1}$$

Es tritt an uns die Aufgabe, die Bedingungen der Konvergenz zu suchen. Diese sollen nicht formal sein, denn wir werden sehen, dass eine jede gleichmässig konvergente Reihe ein Element einer Funktion ist. Die Funktion selbst, ist aber durch gewisse Eigenschaften charakterisiert. Wenn also die Reihe aufhört, irgendwo konvergent zu sein, so ist dieses durch die Eigenschaft der Funktion bedingt.

Wir haben also zu untersuchen, wodurch das Aufhören der Konvergenz bedingt ist.

Wir setzen fest:

Konvergiert eine Reihe für $|x|<\varrho$ und divergiert für $|x|>\varrho$, so stellt ein Kreis mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt herum, den **Konvergenzbezirk** dar. Wir wollen nun einiges über die Grenzen sagen.

Sei um ein einfaches Beispiel zu haben:

$$w = f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z$$
$$z = x + iy$$

Setzen wir fest, dass:

$$|z| = 1 \text{ also } x^2 + y^2 = 1$$

so wird:

$$w = (\alpha_0 + \alpha_1 x) + i\alpha_1 (i - x^2)$$

also:

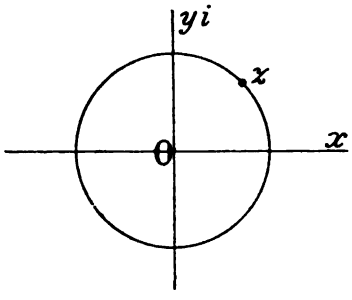
$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x$$
$$v = \alpha_1 (i - x^2)$$

so dass:

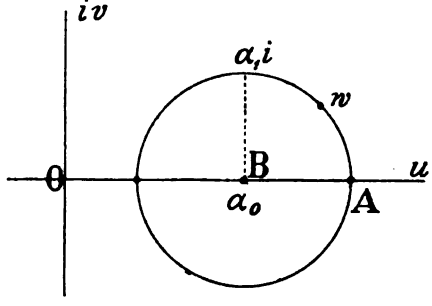
$$v^2 + (u - \alpha_0)^2 = \alpha_1^2$$

wird.

Figur 17.



Figur 18.



Beschreibt also z einen Kreis um den Nullpunkt herum mit dem Radius 1, so beschreibt w einen Kreis um α_0 herum mit dem Radius α_1.

Wir begreifen sodann sofort folgendes:

OA ist der Maximalwert von $|f(z)|$ für den Fall, dass $|z| = 1$. Nehmen wir $|z|$ noch so klein, so kann $f(z)$ nie unter die Grenze $OB = \alpha_0$ gehen, also ist α_0 die untere Grenze für die obere Grenze von $|f(x)|$ und in unserem Falle auch die obere Grenze für die untere Grenze von $|f(x)|$.

Dieses vorausgeschickt, beweisen wir nachstehenden Satz: Sei:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x^{m_1} + \alpha_2 x^{m_2} + \cdots \alpha_r x^{m_r}$$

also eine ganze rationale Funktion, wobei:

$$m_1 m_2 \cdots m_r$$

eine endliche Anzahl $\pm$ ganzer Zahlen, Null ausgenommen, darstellt.

Sei ferner Θ eine solche Grösse, dass:

$$|\Theta| = 1$$

aber für kein m_λ:

$$\Theta^{m_\lambda} = 1$$

so gilt der Satz:

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu 0}^{n-1} f(x_0\,\Theta^\nu) = a_0 + \frac{1}{n}\left(\alpha_1 x_0^{\,n}\frac{1-\Theta^{n m_1}}{1-\Theta^{m_1}} + \cdots\right)$$

Derselbe wird erhalten, wenn man die Funktion:

$$f(x_0\,\Theta^\nu) = a_0 + \alpha_1 x_0^{\,m_1}\Theta^{m_1} + \cdots\ \alpha_n x_0^{\,m_r}\Theta^{m_r}$$

summiert. Ist x_0 endlich, so wird der Klammerausdruck für jeden n unterhalb einer Grenze H bleiben.

Sei nun g der Maximalwert der oberen Grenze für $|f(x)|$, so wird:

$$a_0 + \frac{H}{n} \leqq g$$

also:

$$|a_0| \leqq g - \left|\frac{H}{n}\right|$$

Da aber man für Lim. $n = \infty$, $\left|\frac{H}{n}\right| = 0$ setzen kann, so folgt:

$$|a_0| \leqq g$$

Mit Hilfe dieses Satzes ergibt sich sofort der nachstehende von Cauchy angegebene Satz:

Hat man eine Potenzreihe und denkt man sich der Variablen x alle Werte beigelegt, für welche:

$$|x| = \varrho$$

wobei ϱ im Innern des Konvergenzbereiches liegt, dann erreicht $|f(x)|$ mindestens einmal eine obere Grenze g und für jeden Koëffizienten gilt die Ungleichung:

$$|\alpha_\lambda| < g\varrho^{-\lambda}$$

Sei nämlich:

$$f(x) = \Sigma\alpha_\lambda x^\lambda$$

so folgt:

$$x^{-\lambda}f(x) = \alpha_0 x^{-\lambda} + \cdots + \alpha_\lambda + \alpha_{\lambda+1}x + \cdots \alpha_{\lambda+n}x^n + R_n$$

also wenn:

$$|x| = \varrho$$

und g die obere Grenze von $|f(x)|$ ist, so kann offenbar gesetzt werden:

$$\varrho^{-\lambda}g \geqq |\alpha_\lambda| + |R_n|$$

Da nun:

$$\lim R_n = 0$$

denn x liegt im Innern des Konvergenzbereiches, also ist:

$$\varrho^{-\lambda}g \geqq |\alpha_\lambda|$$

Dieser Satz lässt sich auf mehrere Variable ausdehnen und liefert dann eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Bestimmung des Konvergenzbezirkes. Er kann aber, wie aus dem obigen erhellt, nur dadurch bewiesen werden, dass wir komplexe Werte annehmen.

Sei nun:

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

eine unendliche Reihe von Potenzreihen gegeben. Wir fragen, wann lässt sich dieselbe durch eine Reihe von der Form:

$$\Sigma\alpha_k x^k$$

erreichen. Diese Untersuchung ist wichtig, denn es gibt Reihen, die man nicht zusammenziehen kann. Hat man z. B. eine Fouriersche Reihe, die für alle reellen Werte gilt, und entwickelt jedes Glied in eine Potenzreihe, so erhält man durch Zusammenziehen fast ausnahmslos eine divergente Reihe.

Wir können fordern:

1) dass die Koëffizienten der Reihen eine endliche Summe geben;

2) dass die Einzelnreihen einen gemeinsamen Konvergenzbezirk besitzen.

Ist die eine oder andere Bedingung nicht erfüllt, so kann man offenbar keine Potenzreihe bilden.

Bilden wir nun formal:

$$F(x) = \Sigma A_\lambda x^\lambda$$

Gibt es dann eine positive Grösse ξ, die im Innern des gemeinsamen Konvergenzbezirkes liegt, und die so angegeben werden kann, dass für alle:

$$|x| \leq \xi$$

die Reihe:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \cdots$$

unbedingt und gleichmässig konvergiert, dann lassen sich die Potenzreihen zusammenziehen. Denn wir können immer ein n so angeben, dass für ein noch so kleines δ:

$$\left| \sum_n^\infty f_k(x) \right| < \delta$$

und für die übrigen Glieder können wir unter Voraussetzungen 1) und 2) die Summe bilden.

Es sei demnach:

$$F(x) = \sum_k \mathfrak{P}_k(x)$$

in eine Reihe von der Form:

$$\sum_\lambda a_\lambda x^\lambda$$

zu verwandeln. Dann muss:

$$a_\lambda = \sum_k a_{k\lambda}$$

offenbar endlich sein. Es mögen die Elementarreihen konvergieren für:

$$|x| < R$$

dann wird a_λ endlich, wenn auch:

$$\sum_k \mathfrak{P}_k(x)$$

für $|x| < R$ gleichförmig konvergiert. Denn dann kann man nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ immer eine endliche Zahl m so bestimmen, dass:

$$\left| \sum_m^\infty \mathfrak{P}_k(x) \right| < \frac{\delta}{2}$$

Ist nun $n > m$, so wird auch:

$$\left| \sum_n^\infty \mathfrak{P}_k(x) \right| < \frac{\delta}{2}$$

also um so mehr:

$$\left|\sum_{m}^{n} \mathfrak{P}_k(x)\right| < \delta$$

Diese letzte Summe besteht aus endlicher Anzahl Potenzreihen, kann also in eine Potenzreihe verwandelt werden, so wird:

$$\sum_{m}^{n} \mathfrak{P}_k(x) = \sum_{\lambda}^{\infty} \left(\sum_{m}^{n} \alpha_{k\lambda}\right) x^{\lambda}$$

Nach der vorhergehenden Ungleichung ist aber für $|x| = r < R$ die obere Grenze des absoluten Betrages dieser Potenzreihe gleich δ, folglich gilt nach einem früher bewiesenen Satze für jeden der Koëffizienten:

$$\left|\sum_{m}^{n} \alpha_{k\lambda}\right| < \delta r^{-\lambda},$$

da r endlich ist, verschwindet diese Summe, also ist α_λ endlich. Wir fügen hier eine wichtige Bemerkung bei. Der zuletzt angewendete Satz wurde früher bewiesen unter der wesentlichen Voraussetzung komplexer Grössen. Es genügt also nicht, dass man die gleichmässige Konvergenz der zusammenziehbaren Reihen nur für die reelle Variable beweist, die Reihen müssen auch für die komplexen Werte der Variablen gleichmässig konvergieren. Ob eine bloss für reelle Werte definierte und nur für solche gleichmässig konvergierende Reihe zusammenziehbar ist, lässt sich allgemein nicht entscheiden. Ferner ist zu zeigen, dass wenn:

$$\sum_{k} f_k(x)$$

für $|x| < R$ konvergiert, auch die Reihe:

$$\sum_{\lambda} a_\lambda x_\lambda$$

denselben Konvergenzbezirk besitzt. Denn wenn die erstere Reihe konvergiert, so braucht die letztere notwendigerweise nicht zu konvergieren. Endlich ist noch der Beweis zu liefern, dass unter den gemachten Voraussetzungen:

$$\left|\sum_{k} \mathfrak{P}_k(x) - \sum_{\lambda} \alpha_\lambda x^{\lambda}\right|$$

kleiner als eine jede noch so kleine Grösse δ gemacht werden kann. Damit ist endlich die Identität von:

$$\sum_{k} \mathfrak{P}_k(x) \text{ und } \sum_{\lambda} \alpha_\lambda x^{\lambda}$$

erwiesen.

Wir sehen hier von der Ausführung der Beweise ab. Man findet sie in Weierstrass' Abhandlungen und Biermanns Lehrbuch der Funktionentheorie.

§ 8. Die Reihenfortsetzung.

Nehmen wir als gegeben an:

$$1) \ldots \mathfrak{P}(x \mid a) = 1 + (x-a) + (x-a)^2 + \cdots$$

so wissen wir, dass:

$$2) \ldots [\mathfrak{P}(x \mid a)] = \frac{1}{1-x+a}$$

die Reihe 1) konvergiert für:

$$|x-a|<1$$

Der Ausdruck 2) gilt für alle Werte und zeigt, dass die Funktion für:

$$x-a=1$$

wobei x und a reell ist, unendlich gross wird.

Die Reihe 1) stellt nun also die Funktion nur innerhalb eines Kreises K mit dem Radius 1 dar, während die Funktion im ganzen Raume existiert.

Wir stellen nun die Frage, sind wir imstande den Giltigkeitsbezirk der Reihe 1) so zu erweitern, dass er gleich dem Bereiche der Funktion 2) wird? Diese Frage haben wir mit Ja zu beantworten.

Setzen wir in die Reihe:

$$x-a=(x-a_1)+(a_1-a)$$

und ordnen nach $x-a$, so folgt:

$$3)\ \ldots\ \mathfrak{P}(x\mid a,a_1)=A_0+A_1(x-a_1)+A_2(x-a_1)^2+\cdots$$

So wird diese Reihe sicher, wenigstens innerhalb des mit $\mathfrak{P}(x\mid a)$ gemeinsamen Konvergenzbezirkes K' konvergieren.

Bestimmen wir die Koëffizienten, so folgt:

$$\mathfrak{P}(x\mid a,a_1)=\frac{1}{1-a_1+a}+\frac{(a-a_1)}{(1-a_1+a)^2}+\frac{(x-a_1)^2}{(1-a_1+a)^3}+\cdots$$

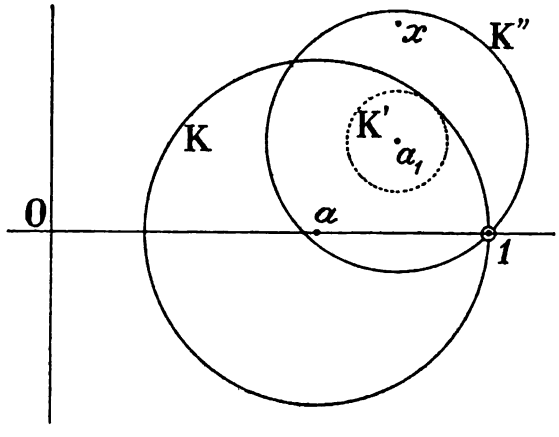
Daraus folgt aber, dass:

$$[\mathfrak{P}(x\mid a,a_1)]=\frac{1}{1-a_1+a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-a_1}{1-a_1+a}}$$

dass also ihre Konvergenz gegeben ist durch:

$$|x-a_1|<|1-a_1+a|$$

Figur 19.



also konvergiert die Reihe innerhalb des Kreises K'' dessen Radius:

$$R''=|1-a_1+a|$$

Nachdem für den gemeinsamen Konvergenzbezirk K' der Konvergenzradius durch:

$$R'=|1-a_1|$$

war, so sieht man, dass:

$$R''>R'$$

Durch die Fortsetzung der Reihe vermittelst des Punktes a_1 haben wir also folgendes erreicht:

„Ich kann den Wert der Funktion $\mathfrak{P}(x\mid a)$ auch für einen Punkt ausserhalb des Konvergenzbezirkes dieser Reihe berechnen (zunächst innerhalb gewisser Grenzen), indem ich die Reihe vermittelst eines geeigneten Punktes fortsetze. Man könnte nun weiter gehen und die Reihe:

$$\mathfrak{P}(x\mid a,a_1,a_2)$$

entwickeln. Auf diese Weise würde man sich überzeugen, dass wir in der

That imstande sind, durch geeignete Fortsetzung jeden Wert der Funktion darzustellen.

Denn es ist:

$$[\mathfrak{P}(x \mid a)] = [\mathfrak{P}(x \mid a, a_1)] = \frac{1}{1-x+a}$$

obschon die Reihen:

$$\mathfrak{P}(x \mid a) \text{ und } \mathfrak{P}(x \mid a, a_1)$$

in verschiedenen Konvergenzbezirken konvergieren, was wir durch [ ] anzeigen.

Nach diesem wird es klar, was damit gemeint ist, wenn wir sagen:

Wenn die Werte einer Funktion gegeben sind für alle Werte des Argumentes eines bestimmten Bezirkes, existiert die Funktion auch ausserhalb dieses Bezirkes derart, dass die wesentlichen Eigenschaften der Funktion erhalten bleiben? Mit anderen Worten lässt sich die Funktion über den Bezirk fortsetzen und wie ist diese Fortsetzung zu verstehen?

Sei also:

$$\mathfrak{P}(x \mid a) = \sum c_\lambda (x-a)^\lambda$$

mit dem Konvergenzradius ϱ gegeben. Setze ich:

$$x - a = (a_1 - a) + (x - a_1)$$

so wird die Reihe:

$$\mathfrak{P}(x \mid a, a_1) = \sum c'_\lambda (x-a_1)^\lambda$$

den Konvergenzradius werden wir später bestimmen.

Wir bemerken noch, dass:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lambda \cdot c'_\lambda = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \mathfrak{P}(a_1 \mid a)$$

Bildet man so:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{P}(x \mid a, a_1 a_2) \\ \mathfrak{P}(x \mid a, a_1 a_2 a_3) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{P}(x \mid a, a_1 a_2 a_3 \cdots a_\lambda) \end{array}$$

so sagt man, man habe die Reihe:

$$\mathfrak{P}(x \mid a, a_1 a_2 \cdots a_\lambda)$$

aus der Reihe:

$$\mathfrak{P}(x \mid a)$$

vermittelst der Stellen:

$$a_1 a_2 \cdots a_{\lambda-1}$$

abgeleitet. Wir sagen ferner:

Eine jede Reihe, die man aus einer gegebenen Potenzreihe in dieser Weise ableiten kann, nämlich dass man im Konvergenzbezirk der letzteren eine Stelle annimmt und eine in der Umgebung dieser Stelle konvergente Reihe ableitet, wird **das Element** einer durch die Gesamtheit der auf diese Weise ableitbaren Reihen definierten **analytischen Funktion** genannt.

Wir wollen diese Funktion monogen nennen, wobei wir bemerken, dass monogen nicht identisch ist mit eindeutig, indem monogene Funktionen auch mehrdeutig sein können.

Es ist sofort klar, dass der Uebergang von a zu a_λ auf unendlich vielen Wegen möglich ist. Gelangt man immer zu derselben Reihe, so sagen wir, die

durch die Gesamtheit der Reihen definierte Funktion sei eindeutig. Ein Beispiel bietet z. B. die immer konvergierende Potenzreihe: wie wir auch dieselbe fortsetzen mögen, immer bleiben wir im Konvergenzbezirk der ursprünglichen Reihe.

Wir haben nun die Grenzstellen der Konvergenzbezirke in Betracht zu ziehen. Dieselben sind dadurch charakterisiert, dass es mindestens eine bestimmte Stelle a gibt, so beschaffen, dass wenn sich x ihr nähert, der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe 0 wird. Für die Reihe:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$

ist 1 eine solche Stelle. Denn bilden wir die abgeleitete:

$$\frac{1}{1-x_1}\cdot\left(1+\frac{x-x_1}{1-x_1}+\frac{(x-x_1)^2}{(1-x_1)^2}+\cdots\right.$$

so ist ihr Konvergenzradius durch:

$$\varrho=|1-x_1|$$

gegeben. Nähert sich x_1 der Einheit, so wird ϱ beliebig klein. Es sei:

$$y=\mathfrak{P}(x|a)$$

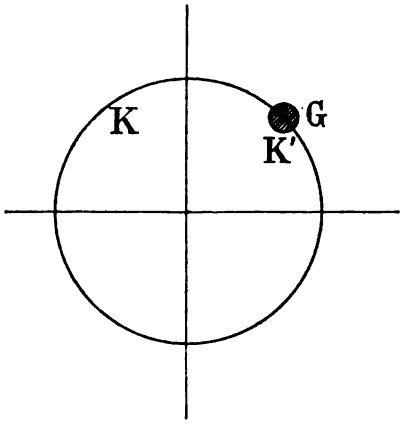
dann gehört innerhalb des Konvergenzbezirkes zu jedem x ein bestimmtes y. Nähert sich x einer Grenzstelle ξ des Konvergenzbezirkes, dann kann es vorkommen, dass sich auch y einer Grenzstelle η nähert. Dann ist $\xi\eta$ eine Grenzstelle von der Beschaffenheit, dass sich in jeder Nähe derselben definierte Stellen xy befinden.

Es entsteht die Frage, ob die Grenzstelle dem Gebiete zugeordnet ist, wenn ja, so sagen wir, die definierte Funktion habe für ξ den Wert η.

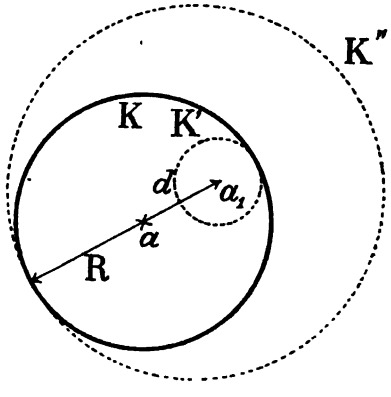
Im allgemeinen ist die Entscheidung hierüber nicht leicht. Definieren wir nun die Grenze des Konvergenzbezirkes wie folgt: Die Grenze des Konvergenzbezirkes wird definiert durch die Gesamtheit jener Punkte, die so beschaffen sind, dass es in jeder noch so kleinen Umgebung dieser Punkte Stellen gibt, die zu den definierten gehören und auch solche, die zu ihnen nicht gehören.

Ist in der Figur 20 der Konvergenzbezirk einer Funktion durch den Kreis K gegeben und bezeichnet ein Kreis K' mit einem beliebig kleinen Radius die Umgebung des Punktes G, und ist G der Grenzpunkt, so liegt ein Teil des Kreises immer im Konvergenzbezirk K und ein Teil ausserhalb desselben, wie klein man auch den Radius der Kreise K' nehmen mag.

Figur 20.



Figur 21.



Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1309. Heft.

Preis des Heftes **25 8 Pf.**

Einführung in die Funktionentheorie.
Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.
Forts. v. Heft 1308. — Seite 49—55.
Mit 2 Figuren. (Schlussheft.)

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; **der Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Einführung in die Funktionentheorie.

Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.

Bearbeitet von **Dr. W. Láska.**

Fortsetzung von Heft 1308. — Seite 49—55. Mit 2 Figuren. (**Schlussheft.**)

Inhalt:

Die Reihenfortsetzung. — Begriff der Funktion nach Weierstrass. — Die Differentiation. — Darstellung der eindeutigen Funktionen. — Titelblatt. — Vorwort. — Inhaltsverzeichnis.

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so **dass** die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben **beigegeben,** welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Die Grenzpunkte selbst können zweierlei Art sein, solche, über welche hinaus sich die Reihen fortsetzen lassen, und solche die eine Grenzstelle bilden.

Es gibt an der Grenze des Konvergenzbezirkes immer mindestens eine Grenzstelle.

Wir beweisen, dass die Konvergenzradien der abgeleiteten Reihen 0 zur unteren Grenze und $2R$ zur oberen Grenze haben. R ist der Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe.

Sei R der Konvergenzradius von:

$$\mathfrak{P}(x|a)$$

R_1 jener von:

$$\mathfrak{P}(x|a, a_1)$$

so ist, vergleiche Figur 21, wenn:

$$|a - a_1| = d < \frac{R}{2}$$

angenommen wird, sicher:

$$R_1 \geqq R - d$$

weil sonst a_1 nicht im Konvergenzbezirke liegen würde.

Da man aber auch $\mathfrak{P}(x|a)$ aus $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ ableiten kann, so ist auch:

$$R \geqq R_1 - d$$

also:

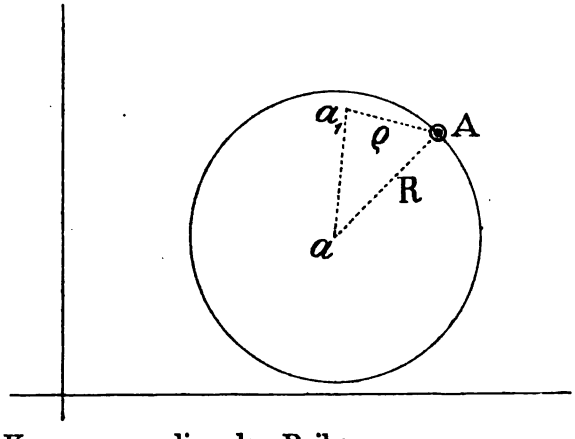
$$R + d \geqq R_1 \geqq R - d$$

und da d die Grösse R zur Grenze hat:

$$2R \geqq R_1 > 0$$

Wir können den Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe bestimmen.

Figur 22.



Sei R der Konvergenzradius der Reihe:

$$\mathfrak{P}(x|a)$$

sowie ϱ der der abgeleiteten:

$$\mathfrak{P}(x|a;\, a_1)$$

sowie A die Grenzstelle des Konvergenzbezirkes der Reihe:

$$\mathfrak{P}(x|a)$$

so wird, vergleiche Figur 22:

$$\varrho = \sqrt{r_1^2 + r_A^2 - 2 r_1 r_A \cos(\varphi_A - \varphi_1)}$$

dabei ist:

$$a_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$$
$$A = r_A e^{i\varphi_A}$$

gesetzt worden.

Natürlich kann es mehrere, ja sogar unendlich viele Grenzstellen geben für einen Konvergenzbezirk. Im allgemeinen erstreckt sich der Radius des Konvergenzkreises bis zum nächsten Singularitätspunkt.

§ 9. Begriff der Funktion nach Weierstrass. Die Differentiation.

Wir haben schon in § 8 den Begriff einer analytischen Funktion angedeutet, wobei wir speziell die monogenen Funktionen hervorgehoben haben. Dadurch sind aber unsere Untersuchungen nicht abgeschlossen, denn wir müssen zeigen, dass eine jede analytische Aufgabe durch monogene analytische Funktionen gelöst werden kann. Denn dadurch haben wir gezeigt, dass die monogene analytische Funktion dem analytischen Funktionsbegriff wirklich entspricht. Ein Ausnahmsfall würde natürlich eine Erweiterung des Funktionsbegriffes nötig machen.

Allgemein lässt sich der Beweis nicht führen. Bisher hat sich bestätigt, dass eine jede analytische Aufgabe durch monogene Funktion gelöst werden konnte, d. h. bei allen analytischen Aufgaben entsprachen diejenigen Grössen, die in ihnen als abhängig von anderen erschienen, dem Begriffe der analytischen Funktion.

Zunächst muss aber noch gezeigt werden, warum wir gerade die Potenzreihe gewählt haben um den Begriff der Funktion darzustellen. Es geschah deswegen, weil wir in der Potenzreihe ein allgemeines Mittel besitzen, welches in allen Fällen wenigstens einen Teil der funktionalen Abhängigkeit uns in einheitlicher Form einer Potenzreihe darstellt. Die Reihe an und für sich vermag aber nicht den ganzen Bereich der funktionalen Abhängigkeit darzustellen, dies wurde erst ermöglicht durch den Begriff der Reihenfortsetzung. Darum haben wir die Potenzreihe ein Funktionselement genannt. Der Begriff der Reihenfortsetzung gewinnt aber dadurch noch an Wichtigkeit, dass die durch die Gesamtheit der aus einem Elemente ableitbaren Reihen überall einen gewissen einheitlichen Charakter besitzt, indem gewisse bestimmte Eigenschaften des zur Definition gegebenen Elementes (z. B. Erfüllung einer gegebenen Differentialgleichung) sich in bestimmter Weise auf alle anderen übertragen.

Gehen wir nun die verschiedenen analytischen Aufgaben durch.

I. Die Funktion wird durch eine algebraische Gleichung definiert.

$$\Sigma y^k f_\mu(x) = 0$$

Wir setzen voraus, dass die Gleichung irreducibel ist; dann lässt sich zeigen, dass in der That y sich als analytische monogene Funktion darstellen lässt und dass man durch ihre Fortsetzung alle dieser Gleichung genügende Werte erhält. Ist sie reducibel, dann wird die Gleichung durch ebensoviele analytische monogene Funktionen dargestellt, als es Teiler gibt, in welche sie zerlegt werden kann. Ist diese Gleichung transcendent, d. h. nicht vom endlichen Grade in Bezug auf y, so gilt dasselbe.

II. Die Funktion wird durch eine Differentialgleichung definiert.

Auch in diesem Falle lässt sich zeigen, dass es immer eine analytische Funktion gibt, welche der gegebenen Differentialgleichung genügt.

Die Ausführung dieser Entwickelungen findet man in den Lehrbüchern der neueren Funktionentheorie.

Die Funktionentheorie in Weierstrass Sinne besitzt noch eine wichtige Eigenschaft, die wir hervorheben müssen. Eine principielle Schwierigkeit der Differentialrechnung beruht nämlich auf dem Umstande, dass es unmöglich ist, aus der gewöhnlichen Definition der Funktion einen Beweis für die Existenz eines Differentialquotienten zu erbringen. Man sieht dieses sofort ein, wenn man z. B. den Satz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

zu beweisen trachtet. In den meisten Lehrbüchern der Differentialrechnung wird dieser Satz als etwas Selbstverständliches angeführt. Doch hat erst Schwarz in neuerer Zeit einen strengen Beweis gegeben, bei dem jedoch die Existenz der ersten und zweiten Ableitung vorausgesetzt wird.

Dadurch, dass man aber zeigt, dass eine gleichmässig konvergierende Potenzreihe als Element einer analytischen Funktion Ableitungen besitzt, die mindestens innerhalb des Konvergenzbereiches der Elementarreihe konvergieren, gelangt man zu einem strengen Begriff der Ableitung.

Sei:

$$f(x) = \mathfrak{P}(x|a)$$

eine analytische Funktion, dann ist:

$$f'(x) = \mathfrak{P}'(x|a)$$

Es ist demnach $f'(x)$ der Inbegriff aller aus der Elementarreihe:

$$\mathfrak{P}'(x|a)$$

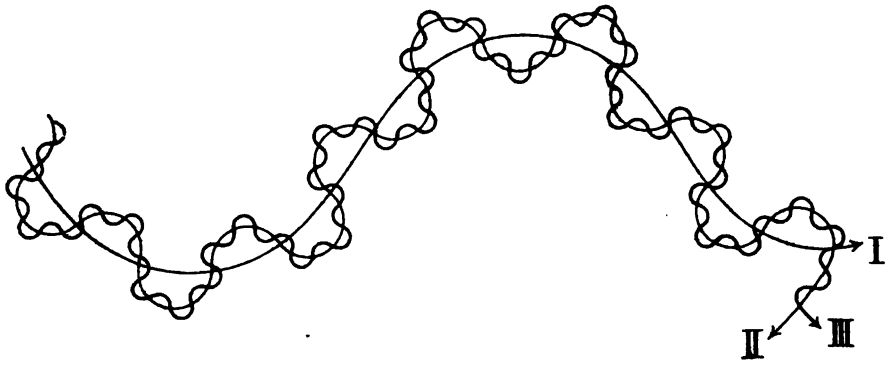
ableitbaren Reihen.

In früherer Zeit hat man oft die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit für gleichwertig angesehen, indem man als selbstverständlich annahm, dass alle stetigen Funktionen einen Differentialquotienten besitzen müssen.

Weierstrass hat nun gezeigt, dass man aus der Stetigkeit keinen Schluss auf die Differenzierbarkeit ziehen kann. Das schien absurd, man verwies auf die Beweise von Duhamel, Ampère u. a. Allein diese sind fehlerhaft.

Es gibt stetige Funktionen, die so beschaffen sind, dass es in jedem noch so kleinen Intervalle Werte von x gibt, für welche ein Differentialquotient im gebräuchlichen Sinne nicht existiert, d. h. es gibt eine Gattung von Kurven, an welche sich keine bestimmten Tangenten ziehen lassen. Die Kurven entstehen auf folgende Weise:

Figur 23.



Denkt man sich z. B. eine Sinuslinie I und auf dieser eine zweite mit einer Amplitude, die kleiner ist, als die der Linie I, sowie eine dritte III, welche in Bezug auf II sich gerade so verhält, wie II zu I und eine IV, und so weiter bis ins Unendliche, so erhält man eine Kurve, die in der Nähe eines jeden Punktes unendlich viel Maxima und Minima hat und welche die bildliche Darstellung einer Funktion ist, die keinen bestimmten Differentialquotienten besitzt. Weierstrass hat eine algebraische Darstellung einer ähnlichen Funktion gegeben.

Sei a eine positive ungerade ganze Zahl und grösser als 1 und b eine positive Zahl kleiner als 1 und stets:

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

so ist:

$$f(x) = \sum_0^\infty b^n \cos(a^n \pi x)$$

eine solche Funktion. Sie hat keinen bestimmten Differentialquotienten, obwohl sie stetig ist.

Die Reihe konvergiert gleichmässig, denn die Summe ihrer Glieder vom $n$ten angefangen, ist kleiner als:

$$b^n + b^{n+1} + \cdots = \frac{b^n}{1-b}$$

ist demnach stetig.

Von der Ausführung des Beweises sehen wir ab. Derselbe ist in Weierstrass' Abhandlungen zur Funktionenlehre, p. 97, gegeben worden.

Betrachten wir eine Grösse:

$$f(x)$$

die für jeden Wert von x innerhalb eines reellen Bereiches eindeutig definiert ist und sich stetig ändert. Gelingt es nun:

$$f(x+h) - f(x) = ch + hh'$$

zu machen, wo h' mit h unendlich klein wird und c von h unabhängig ist, so stellt c den Wert des Differentialquotienten dar.

Gewöhnlich definiert man so:

$$c = \text{Lim.} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für:

$$\text{Lim.}\, h = 0$$

Dabei wird eine doppelte Voraussetzung gemacht. Man nimmt erstens an, dass dieser Grenzwert endlich ist und dass er dasselbe bleibt, gleichviel ob h positiv oder negativ genommen wird.

Uns interessiert vorzüglich die Differenzierbarkeit der Reihen. Es gilt der Satz:

Die Funktion:

$$F(x) = \sum_0^\infty f_\nu(x)$$

wo f_ν eindeutig definierte analytische Funktionen sind, ist differenzierbar, wenn $F(x)$ gleichmässig konvergiert, und es ist:

$$dF(x) = \sum_0^\infty df_\nu(x)$$

Es reicht aber nicht aus, dass die Reihe für alle reellen Werte gleichmässig konvergiert. Die Glieder können nur dann zusammengezogen werden, wenn die Reihe für komplexe Werte gleichmässig konvergiert. Ist die Reihe für reelle Werte definiert, so kann man daraus nur schliessen, dass sie innerhalb des Konvergenzbezirkes stetig ist und weiter nichts. Bezüglich der Differenzierbarkeit hat man noch kein allgemein geltendes Kriterium.

§ 10. Darstellung der eindeutigen Funktionen.

Seien:

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

vorgeschriebene Nullstellen, dann ist durch sie die Funktion:

$$\varphi(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

vollkommen bestimmt bis auf die Konstante A. Nehmen wir nun an, es seien Nullstellen in ∞ Anzahl gegeben, also:

$$a_1 a_2 a_3 \cdots, a_n + \cdots \text{ in inf.}$$

Dann wird allgemein:

$$\varphi(x) = \psi(x)\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \cdots \text{ in inf.}$$

wobei $\psi(x)$ eine im endlichen nirgends verschwindende Funktion ist. Nehmen wir den einfachsten Fall an, d. h.:

$$a_1 = -1,\ a_2 = -2, \cdots a_\nu = -\nu, \cdots$$

so wird das Produkt:

$$\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right) \cdots$$

divergent, denn es ist die Reihe:

$$\sum_0^\infty \frac{x}{n}$$

demnach muss $\psi(n)$ eine solche Funktion sein, welche die Divergenz des Produktes aufhebt und dabei im endlichen nirgends verschwindet. Eine solche Funktion ist aber das Produkt:

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\nu}}$$

wir haben also:

$$\varphi(x) = \chi(x) \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}}$$

wobei noch χ eine Funktion ist, die im endlichen nirgends verschwindet. Man sieht sofort ein, dass das Produkt die oben verlangte Eigenschaft hat.

Wenn wir die letztere Formel verallgemeinern, so wird:

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{a_\nu}\right)e^{-g_\nu(x)}$$

wobei $g_\nu(x)$ eine ganze Funktion von x bezeichnet, auch die oben ewähnte Eigenschaft besitzen.

Um Beispiele derartiger Darstellungen zu haben, erinnern wir an die Definitionen (ν gleich 0 ausgenommen):

$$\sin \pi x = x\pi \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) e^{\frac{x}{\nu}}$$

$$\cos \pi x = \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{2x}{2\nu+1}\right) e^{\frac{2x}{2\nu+1}}$$

Diese soeben erwähnten Sätze nötigen uns, einen neuen Begriff einzuführen.

Unter Primfunktion von x versteht man jede eindeutige Funktion dieser Grösse, welche nur eine (wesentliche oder ausserwesentliche) singuläre Stelle und entweder eine oder gar keine Nullstelle hat. Sei c die singuläre Stelle, so ist der allgemeinste Ausdruck einer solchen Funktion gegeben durch:

$$\left(\frac{k}{x-c} + e\right) e^{g\left(\frac{1}{x-c}\right)}$$

k und l sind Konstanten, $g\left(\frac{1}{x-c}\right)$ eine ganze rationale Funktion von $\frac{1}{x-c}$.

Weierstrass hat nun nachgewiesen, dass eine jede eindeutige Funktion mit einer (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stelle entweder selbst eine Primfunktion ist, oder doch sich als ein Produkt von Primfunktionen mit derselben Stelle darstellen lässt.

Wir können uns auf den Beweis dieses wichtigen Satzes nicht einlassen. Man findet denselben bei Weierstrass in der Funktionenlehre.

Ist die Anzahl der singulären Stellen eine endliche, so gilt ein analoger Satz.

Wir wollen noch auf den Zusammenhang der Produkte mit den Potenzreihen etwas näher eingehen. Zu diesem Zwecke beweisen wir folgenden Satz:

Verschwindet eine transcendente ganze Funktion $f(x)$ für $x = a_1$, so ist:

$$\frac{f(x)}{1 - \frac{x}{a_1}}$$

wieder eine transcendente ganze Funktion.

Es sei:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$= b_0 + b_1 (x - \alpha_1) + b_2 (x - \alpha_1)^2 + \cdots$$

da nun für $x = \alpha$ $f(x) = 0$ ist, so muss $b_0 = 0$ sein, wir haben also:

$$\frac{f(x)}{1 - \frac{x}{\alpha_1}} = -\alpha_1 [b_1 + b_2 (x - \alpha_1) + b_3 (x - \alpha_1)^2 + \cdots]$$

Auf diese Weise können wir alle Nullstellen eliminieren und erhalten:

$$f(x) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \left(1 + \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \cdots [b_1^r + b_2^r (x - \alpha_r) + \cdots]$$

Wird in der Zahl der Nullstellen eine ∞, dann kann es geschehen, dass die letztere Potenzreihe:

$$b_1^r + b_2^r (x - \alpha_r) + \cdots$$

nicht mehr konvergiert. Dann muss die Produktenentwickelung in der Weise modifiziert werden, dass man die Funktionen $e^{\varphi(x)}$ einführt, wie oben angedeutet ist.

Wir wollen noch beweisen, dass wenn:

$$g_n(x) = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a_n^2} + \cdots \frac{1}{n-1}\frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}}$$

gesetzt wird, das Produkt:

$$\pi\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)e^{g_n(x)}$$

unbedingt konvergiert. Denn dieser Beweis ist erforderlich, um die Berechtigung der oben eingeführten Form zu erweisen. Wir haben:

$$\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)e^{g_n(x)} = \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)e^{-\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right) - \frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n} - \cdots}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)^{-1} e^{-\frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n} - \cdots}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n} - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{a_n^{n+1}} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n}(1 + \varepsilon_n)$$

Demnach wird das obige Produkt konvergieren, wenn die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left|\frac{x}{a_n}\right|^n |(1 + \varepsilon_n)|$$

konvergiert. Nimmt man an, dass:

$$a_1 < a_2 < a_3 \cdots$$

und dass:

$$\text{Lim. } a_n = \infty$$

so ist klar, dass man immer ein endliches n angeben kann, für welches:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\frac{x}{a_n}\right|^n |(1 + \varepsilon_n)| < \delta$$

wo δ eine beliebig kleine vorgegebene Grösse bezeichnet. Das Produkt konvergiert also in diesem Falle unbedingt.

Verlag von Julius Maier in Stuttgart.

Lehrbuch der Differentialrechnung

von Dr. **Adolph Kleyer.**

Erster Teil.

Die einfache und wiederholte Differentiation expliziter Funktionen von einer unabhängigen Variablen.

Ohne Anwendung der Grenzen- und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen.

Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben.

Zweite Auflage. **Preis Mk. 5. —.**

Zweiter Teil.

Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwicklungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima.

Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren und 230 Erklärungen.

Bearbeitet nach **System Kleyer** von Prof. Dr. **Haas.**

Preis Mk. 8. —.

Dritter Teil.

Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven.

Bearbeitet nach **System Kleyer** von Prof. Dr. **Haas.**

Befindet sich unter der Presse und erscheint im Herbst 1894.

Vierter Teil.

Anwendung der Differentialrechnung auf Raumkurven und Flächen.

Bearbeitet nach **System Kleyer** von Prof. Dr. **Haas.**

Befindet sich in Bearbeitung.

Lehrbuch der Integralrechnung

von Dr. **Adolph Kleyer.**

Erster Teil.

Die Integration von Differentialfunktionen von der allgemeinen Form $f(x) \cdot dx$

Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung.

Preis Mk. 10. —.

Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen.

Erster Teil.

Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen.

Bearbeitet nach **System Kleyer** von Dr. G. **Weichold.**

Preis Mk. 10. —.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen und dauernden Gebrauch zu gestatten.**

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das **vollständige**

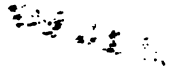
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

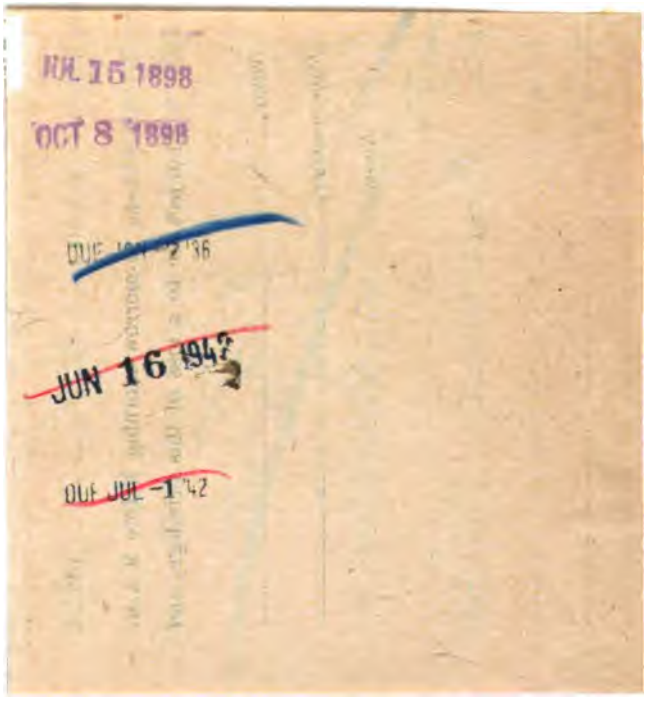
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



NOV 15 1898
OCT 8 1898
JUN 16 1942
2


JUL 15 1898
OCT 8 1898
JUN 16 1942
DUE JUL -1 '42